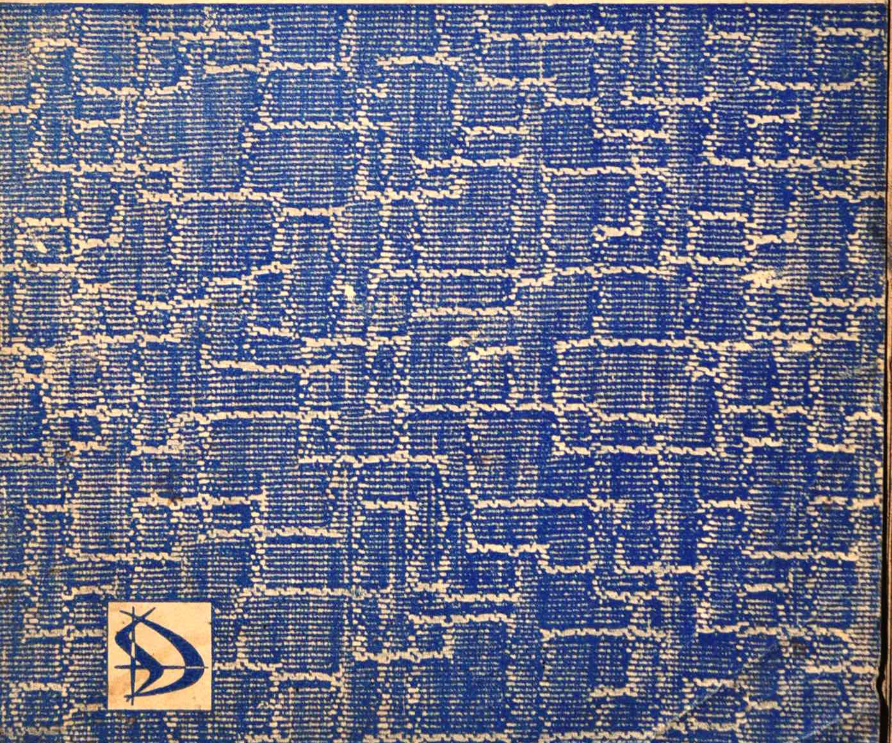
NGUYỄN VĂN PHÚ

ĐẠI SỐ HỌC

Lớp Mười Một A



ĐƯỜNG - SÁNG XUẤT - BẢN

- **BỘ TOÁN TRUNG - HỌC**
và TÚ - TÀI A, B
của *NGUYỄN VĂN PHÚ*
NGUYỄN TÁ
GIANG NGỌC HUY
NGUYỄN NGỌC LƯU

- **BỘ LÝ - HÓA TRUNG - HỌC**
và TÚ - TÀI A, B
của *TRƯƠNG ĐÌNH NGỮ*
ĐINH CÔNG HOẠT
VŨ MẬU LÂM
NGUYỄN NGỌC LÂM
VŨ QUỐC OAI

- **BỘ VẠN - VẬT TRUNG - HỌC**
và TÚ - TÀI A, B
của *NGÔ ĐÌNH HOÀN*
LÊ DUY NGHIỆP
NGUYỄN LẬP THỎA
PHẠM VĂN QUÝ
TRẦN VĂN HOANH

- **BỘ CÔNG - DÂN TRUNG - HỌC**
và TÚ - TÀI A, B, C, D
của *PHẠM TẤN HÒA*
BÙI TRỌNG CHƯƠNG

- **BỘ SỬ - ĐỊA TRUNG - HỌC**
và TÚ - TÀI A, B, C, D
của *ĐỖ QUANG CHÍNH*
TRƯƠNG NGỌC PHÚ

- **BỘ VĂN - PHẠM ANH - NGỮ**
của *HOÀNG CHÂU*
NGUYỄN HỮU QUYỀN

GIÁ : [redacted] .

300

Đàm Thi Bích Phưởng
11A6

NGUYỄN VĂN PHÚ

●

ĐẠI-SỐ-HỌC

Lớp Mười Một A

Ấn-bản 72 — 73

ĐƯỜNG-SÁNG XUẤT-BẢN
55/14-16, đường Phát-Diệm — Sài-gòn

CHƯƠNG-TRÌNH

Đại-số-học

LỚP MƯỜI MỘT A

Tam-thức bậc hai. Phân-tích ra thừa-số. Dấu của tam-thức bậc hai.

Bất-phương-trình bậc hai. So-sánh một số với nghiệm-số của một tam-thức bậc hai.

Định-nghĩa và nghĩa hình-học của đạo-hàm.

Quy-tắc tính đạo-hàm (đạo-hàm của tổng-số, tích-số v.v...)

Dấu của đạo-hàm và chiều biến-thiên của hàm-số.

Hàm-số bậc hai, hàm-số nhất-biến.

(Trích Chương-trình Trung-học
cập-nhật-hóa 1971 của Bộ Giác-Dục)

1. TAM-THỨC BẬC HAI

1. ĐỊNH-NGHĨA

1. 1. TAM-THỨC BẬC HAI.

Tam-thức bậc hai là một biểu-thức đại-số có dạng $ax^2 + bx + c$, trong đó $a \neq 0$.

Nếu $a = 0$ thì tam-thức thành ra $bx + c$, như thế là một nhị-thức bậc nhất.

Thí-dụ : $2x^2 - 5x + 3$ $\quad 4x^2 + 7x$

$5x^2 + 7 - 8x$ $\quad -5x^2$

Trong tam-thức $ax^2 + bx + c$, abc gọi là các *hệ-số*, x là *biến-số.*

Sau này, ta sẽ nói nhiều đến hệ số a, ta sẽ gọi c là *hệ-số đầu* của tam-thức. Nên nhớ $a \neq 0$, b hay c có thể triệt-tiêu.

Trong suốt cuốn sách này, ta sẽ chỉ dùng những *số thực* nghĩa là các số thuộc tập-hợp R. Gặp những trường-hợp khác, ta sẽ ghi rõ.

1. 2. KÝ-HIỆU.

$ax^2 + bx + c$ là một biểu-thức phụ-thuộc vào x, ta chỉ biểu-thức đó là $f(x)$ và ta viết :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Nên nhớ rằng $f(x)$ là một ký-hiệu để chỉ tam-thức $ax^2 + bx + c$, đừng nghĩ rằng dấu $=$ để giữa $f(x)$ và $ax^2 + bx + c$ là dùng để chỉ phương-trình có hai vế.

1. 3. TAM-THỨC VÀ PHƯƠNG-TRÌNH BẬC HAI KHÁC NHAU.

— Tam-thức bậc hai là một biểu-thức đại-số phụ-thuộc vào x ; x thay đổi thì tam-thức thay đổi.

Thí dụ :

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 5$$

$$f(4) = 2 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 + 3 = 15$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 0$$

$$f(\alpha) = 2\alpha^2 - 5\alpha + 3$$

— Phương-trình bậc hai có hai vế :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Muốn cho hai vế bằng nhau, nghĩa là muốn cho phương-trình được thỏa, thì x chỉ có được *hai* trị-số là nhiều nhất. Hai trị-số đó — nếu có — được gọi là *nghiệm-số* của phương-trình.

1. 4. NGHIỆM-SỐ CỦA TAM-THỨC BẬC HAI.

Theo định-nghĩa, nghiệm-số của tam-thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ là nghiệm-số của phương-trình $ax^2 + bx + c = 0$.

Thí-dụ : $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$

Nghiệm-số của tam-thức đó chính là nghiệm-số của phương-trình :

$$4x^2 - 5x + 1 = 0$$

Suy ra $x' = \dfrac{1}{4}$ $\quad x'' = 1$

2. PHÂN-TÍCH TAM-THỨC THÀNH THỪA-SỐ.

1. 5. NHẮC LẠI.

Coi tam-thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$.

Gọi tập-hợp các nghiệm-số là S.

$$\Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad S = \varnothing$$

$$\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$$

$$\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad S = \left\{ \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$$

1. 6. PHÂN-TÍCH TAM-THỨC THÀNH THỪA-SỐ.

Coi tam-thức $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Đặt a làm thừa-số chung :

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

Thêm và bớt $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ vào trong ngoặc tròn :

$$f(x) = a\left[x^2 + 2\,\frac{b}{2a}\,x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} \right]$$

Trong ngoặc vuông, ba số-hạng đầu viết gọn lại là $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

và hai số-hạng sau viết là $-\frac{b2 - 4ac}{4a^2}$ hay $-\frac{\Delta}{4a^2}$

Vậy : $$\boxed{\forall x \in R \qquad f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]} \qquad (1)$$

Dạng-thức đó dùng cho bất-cứ tam-thức nào cũng được.

Đó gọi là *dạng-thức chính-tắc* của tam-thức bậc hai.

Ta có thể biến-đổi (1) trong trường-hợp $\Delta = 0$ và trong trường-hợp $\Delta > 0$.

Khi $\Delta = 0$ thì $f(x)$ có nghiệm-số kép $x' = \dfrac{-b}{2a}$.

Lúc đó (1) viết được là :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

$$= a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2$$

$$= a(x - x')^2$$

$$\boxed{\mathbf{f(x) = a(x - x')^2}} \qquad (2)$$

Khi $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm-số khác nhau :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Coi lại dạng-thức (1) :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Vì $\Delta > 0$ nên ta viết được $\dfrac{\Delta}{4a^2} = \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$

Do đó : $$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

Trong ngoặc vuông là một biểu-thức thuộc dạng $A^2 - B^2$. Ta phân-tích thành $(A + B)(A - B)$.

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$f(x) = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Nhưng hai nghiệm-số của tam-thức là :

$$x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

cho nên ta có :

$$\boxed{f(x) = a(x - x')(x - x'')} \qquad (3)$$

Ta nói rằng ta đã *phân-tích tam-thức thành thừa-số.*

1. 7. TÓM-TẮT.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]} \\ \Delta = 0 & f(x) = a(x - x')^2 \\ \Delta > 0 & f(x) = a(x - x')(x - x'') \end{array}}$$

1. 8. THÍ-DỤ.

Phân-tích các tam-thức sau đây thành thừa-số :

$$f(x) = -x^2 + 5x - 6$$

$$g(x) = 20x^2 - 31x + 12$$

$$h(x) = 2x^2 + 2x + \frac{1}{2}$$

- $f(x) = -x^2 + 5x - 6$; $a = -1$, $x' = 2$, $x'' = 3$.

  $f(x) = a(x - x')(x - x'') = -(x - 2)(x - 3)$

- $g(x) = 20x^2 - 31x + 12$; $a = 20$, $x' = \frac{3}{4}$, $x'' = \frac{4}{5}$.

  $g(x) = a(x - x')(x - x'') = 20\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{4}{5}\right)$

- $h(x) = 2x^2 + 2x + \frac{1}{2}$; $a = 2$, $x' = x'' = \frac{-1}{2}$.

$$h(x) = a(x - x')^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

1. 9. ỨNG DỤNG : ĐƠN-GIẢN PHÂN-SỐ HỮU-TỈ.

Giả-sử ta phải đơn-giản phân-số hữu-tỉ

$$P(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 8}$$

Tử-số là một tam-thức bậc hai mà hai nghiệm-số là $-2, +3$ nên được phân-tích thành $(x + 2)(x - 3)$.

Mẫu-số là một tam-thức bậc hai mà hai nghiệm-số là $-2, +4$ nên được phân-tích thành $(x + 2)(x - 4)$.

Do đó $$P(x) = \frac{(x + 2)(x - 3)}{(x + 2)(x - 4)}$$

Khi $x \neq -2$ thì $x + 2 \neq 0$, ta đơn-giản cho $x + 2$ để có :

$$P(x) = \frac{x - 3}{x - 4}$$

Khi $x = -2$ thì $P(x)$ có dạng-thức vô-định $\frac{0}{0}$.

BÀI TẬP

- **Tính nghiệm-số của các tam-thức sau đây :**

1. 1. $x^2 - 34x + 225$

1. 2. $x^2 - 11x + 18$

1. 3. $3x^2 + 13x + 4$

1. 4. $15x^2 - 14x + 3$

1. 5. $5x^2 - 6x + 1$

1. 6. $-3x^2 + 9x - 6$

1. 7. $2x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{2}$

1. 8. $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6}$

- **Biện-luận theo thông-số m số nghiệm-số của mỗi tam-thức sau đây :**

1. 9. $(m - 1)x^2 - 2(m - 2)x + m + 1$

1. 10. $mx^2 + 2(m + 1)x + m + 5$

1. 11. $5x^2 - 10mx + 5(m^2 - m - 1)$

1. 12. $(m + 1)x^2 - 2mx + m + 6$

1. 13. $(m - 4)x^2 - 2(m - 1)x + m + 2$

1. 14. $(m + 3)x^2 - 4mx + m + 5$

- **Định thông-số m để mỗi tam-thức sau đây có nghiệm-số kép và tính nghiệm-số kép đó :**

1. 15. $(m - 1)x^2 - 2mx + m - 3$

1. 16. $(m - 2)x^2 - 2(m - 5)x + m + 3$

1. 17. $mx^2 - 2(m + 8)x + m + 3$

1. 18. $(2m - 1)x^2 + mx - 6$

1. 19. $(m - 2)x^2 + (2m + 3)x + m + 2$

- **Phân-tích các tam-thức sau này thành thừa-số :**

1. 20. $12x^2 - 17x + 6$

1. 21. $-3x^2 + 5x + 2$

1. 22. $8x^2 - 6x + 1$

1. 23. $16x^2 + 10x + 1$

1. 24. $4x^2 - 12x + 9$

1. 25. $x^2 - 10x + 25$

1. 26. $9x^2 - 6x + 1$

1. 27. $\dfrac{x^2}{4} + 3x + 9$

1. 28. $-x^2 + 7x - 3$

1. 29. $x^2 + 8x + 6$

1. 30. $4x^2 + 57x - 1260$

1. 31. $5x^2 - 151x + 432$

1. 32. $3x^2 + 275x - 37500$

1. 33. $39x^2 - 256x + 132$

- **Đơn-giản các phân-số sau đây :**

1. 34. $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9}$

1. 35. $\dfrac{x^2 - 49}{x^2 - 2x - 63}$

1. 36. $\dfrac{20x^2 - 13x + 2}{15x^2 - x - 2}$

1. 37. $\dfrac{5x^2 + 14x - 3}{10x^2 - 17x + 3}$

1. 38. $\dfrac{20x^2 - 23x + 6}{4x^2 - 11x + 6}$

1. 39. $\dfrac{2x - 3}{2x^2 - 13x + 15}$

1. 40. $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$

1. 41. $\dfrac{5x + 2}{5x^2 + 7x + 2}$

1. 42. $\dfrac{x^2 - (a + b)x + ab}{x^2 - (a + c)x + ac}$

1. 43. $\dfrac{x^2 - (a + 2b)x + 2ab}{x^2 - (2b + c)x + 2bc}$

1. 44. $\dfrac{(x^2 - 5x + 6)^2 - (x - 2)^2}{(x - 2)^4 - (x - 2)^2}$

2. DẤU CỦA TAM-THỨC BẬC HAI

2. 1. NHẮC LẠI.

Trong bài trước, ta đã biết rằng

$$\forall x \in \mathrm{R} : \quad ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \qquad (1)$$

Khi $\Delta = 0$ thì ta dùng dạng

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x')^2 \qquad (2)$$

Khi $\Delta > 0$ thì ta dùng dạng

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x')\,(x - x'') \qquad (3)$$

2. 2. DẤU CỦA $\mathbf{f\,(x) = ax^2 + bx + c}$.

- *Trường-hợp* $\Delta < 0$. Ta coi dạng-thức chính-tắc (1) :

$$\forall x \in \mathrm{R} : \quad f\,(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Vì $\Delta < 0$ nên $-\Delta > 0$ và $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$

Trong ngoặc vuông là một biểu-thức luôn-luôn *dương*. $f\,(x)$ là tích-số của a với một biểu-thức *dương*, nên $f\,(x)$ theo dấu của a.

Tóm lại : **Nếu $\Delta < 0$ thì f (x) theo dấu của a. Nói khác đi, a . f (x) > 0.**

- *Trường-hợp* $\Delta = 0$: Ta coi dạng-thức (2) :

$$\forall x \in \mathrm{R} : \qquad f(x) = a\,(x - x')^2$$

Nếu $x = x'$ tức là nếu $x = -\dfrac{b}{2a}$ thì $f(x) = 0$.

Nếu $x \neq x'$ thì $(x - x')^2$ luôn luôn *dương*. $f(x)$ là tích-số của a với một số dương nên $f(x)$ theo dấu của a.

Tóm lại : **Nếu $\Delta = 0$ thì f (x) theo dấu của a, nhưng khi $x = \dfrac{-b}{2a}$ thì f(x) = 0.**

- *Trường-hợp* $\Delta > 0$. Ta coi dạng-thức (3) :

$$\forall x \in \mathrm{R} : \qquad f(x) = a\,(x - x')\,(x - x'')$$

Muốn biết dấu của tam-thức $f(x)$, ta xét dấu của $(x - x')$, $(x - x'')$ và a. Giả-sử $x' < x''$.

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
$x - x'$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x''$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x')\,(x - x'')$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a\,(x - x')(x - x'')$		cùng dấu với a	0	trái dấu với a	0	cùng dấu với a	

Vậy : **f (x) theo dấu của a, trừ khi x có trị-số ở trong khoảng [x′, x″], lúc đó thì f (x) trái dấu với a.**

Sự khảo-sát trên dẫn ta đến định-lý quan-trọng sau đây, thường gọi là *định-lý về các dấu của tam-thức bậc hai.*

Trong tam-thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$:

1. Nếu $\Delta < 0$, thì $f(x)$ cùng dấu với a.

2. Nếu $\Delta = 0$, thì $f(x)$ cùng dấu với a và $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$.

3. Nếu $\Delta > 0$, thì $f(x)$ cùng dấu với a khi x có trị-số ở ngoài khoảng hai nghiệm-số ; $f(x)$ trái dấu với a khi x có trị-số ở trong khoảng hai nghiệm-số.

Nói vắn-tắt, ta có :

Tam-thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ bao giờ cũng theo dấu của a, trừ một trường-hợp : tam-thức có hai nghiệm-số và x ở trong khoảng hai nghiệm-số đó ; lúc đó tam-thức trái dấu với a.

2. 3. THÍ-DỤ.

Xét dấu của ba tam-thức sau này :

$$f(x) = -3x^2 + x - 4$$

$$g(x) = x^2 + 25x + 10$$

$$h(x) = x^2 + 7x - 8$$

- $f(x) = -3x^2 + x - 4$ (hệ-số của x^2 là $a = -3$).

$\Delta < 0$, tam-thức vô-nghiệm.

Vậy $f(x)$ theo dấu của -3, nghĩa là $f(x) < 0$, bất-chấp x là bao nhiêu.

- $g(x) = x^2 + 25x + 10.$

$\Delta = 0$, tam-thức có nghiệm-số kép : $x' = -5$.

$g(x) = a(x - x')^2 = (x + 5)^2.$

Vậy khi $x \neq -5$ thì $f(x) > 0$, và khi $x = -5$ thì $f(-5) = 0$.

- $h(x) = x^2 + 7x - 8$ (hệ-số của x^2 là $a = 1$).

Tam-thức có hai nghiệm-số là -8 và 1. Khi x ở ngoài khoảng $(-8 ; 1)$ thì $h(x) > 0$, và khi x ở trong khoảng đó thì $h(x) < 0$.

x	$-\infty$		-8		1		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. 4. DẤU CỦA MỘT BIỂU-THỨC THUỘC DẠNG (ax + b) (cx + d).

Giả-sử ta phải xét dấu của biểu-thức :

$$\mathbf{f(x) = (2x + 3)(x - 2)}$$

Nếu ta khai-triển ra, ta sẽ được một tam-thức bậc hai

$$f(x) = 2x^2 - x - 6$$

Nhờ định-lý về dấu của tam-thức bậc hai, ta xét dấu của $2x^2 - x - 6$ dễ-dàng.

Tuy-nhiên ta làm như sau đây cho tiện :

Khi coi $f(x) = (2x + 3)(x - 2)$ thì dùng cách tính nhẩm ta biết rằng đó là một tam-thức bậc hai mà hệ-số đầu là $a = 2$.

Nghiệm-số của tam-thức đó là

$$x' = -\frac{3}{2} \quad , \quad x'' = 2$$

Kết-quả là

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Tương-tự, ta coi :

$$g(x) = (3 - 5x)(2x + 1).$$

Nếu khai-triển, ta sẽ được một tam-thức bậc hai mà hệ-số đầu là — 10. Nghiệm-số là

$$x' = \frac{3}{5}, \quad x'' = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. 5. DẤU CỦA MỘT BIỂU-THỨC THUỘC DẠNG $\frac{ax + b}{cx + d}$.

Giả-sử ta phải xét dấu của biểu-thức hữu-tỉ

$$P(x) = \frac{2x - 3}{x + 5}$$

Biểu-thức này vô-nghĩa khi $x = -5$ (vì lúc đó mẫu-số triệt-tiêu).

Ta căn-cứ vào điều này :

Dấu của tỉ-số $\frac{A}{B}$ cũng giống như dấu của tích-số $A \times B$.

(Ta không hề nói : $\frac{A}{B}$ bằng $A \times B$). Vậy thay vì xét dấu của $\frac{2x - 3}{x + 5}$, ta xét dấu của $(2x - 3)(x + 5)$. Vấn-đề này đã được học rồi.

x	$-\infty$		-5		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$(2x-3)(x+5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\dfrac{2x-3}{x+5}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Dấu $||$ để tỏ rằng phân-số *không được xác-định.*

Sau này, trong lúc thực-hành, ta có thể bỏ dòng giữa đi [nghĩa là bỏ việc xét dấu tích-số $(2x-3)(x+5)$].

2. 6. THÍ-DỤ KHÁC.

- **Xét dấu của biểu-thức**

$$E(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 41x + 40)$$

Ta xét dấu của từng thừa-số một. Mỗi thừa-số là một tam-thức bậc hai. $x^2 - 4$ có hệ-số đầu là $a = 1$ và có hai nghiệm-số là -2, $+2$. $x^2 - 41x + 40$ có hệ-số đầu là $a = 1$ và có hai nghiệm-số là 1 ; 40.

x	$-\infty$		-2		1		2		40		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2-41x+40$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$E(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

- **Xét dấu của biểu-thức**

$$E(x) = (x^3 - x)(x^4 - 4)$$

Ta viết $$E(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 + 2)$$

$x^2 + 2$ luôn luôn *dương*. Vậy dấu của $E(x)$ cũng giống như dấu của

$$E'(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - 2)$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x^2 - 1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - 2$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$E(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

- **Xét dấu của biểu-thức**

$$E(x) = \frac{x^3 + 1}{x^4 - 9}$$

Ta nhận-xét trước rằng :

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

vì $$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$x^4 - 9 = (x^2 - 3)(x^2 + 3)$$

$x^2 + 3$ luôn luôn *dương*.

$E(x)$ không được xác-định khi

$$x^2 - 3 = 0 \quad \text{tức là khi} \quad x = \pm\sqrt{3}.$$

$$E(x) = \frac{x^3 + 1}{x^4 - 9} = \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x^2 - 3)(x^2 + 3)}$$

Ta đã biết $x^2 + 3 > 0$. Tam-thức $x^2 - x + 1$ *vô-nghiệm* (vì $\Delta = -3 < 0$) và có hệ-số đầu bằng 1, nên luôn luôn *dương*.

Do đó dấu của E (x) cũng giống như dấu của $E'(x) = \frac{x+1}{x^2-3}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		$+\sqrt{3}$		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
E (x)		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

2. 7. MỘT VẤN-ĐỀ

Cho tam-thức $f(x) = (m+1)x^2 - 2(2m+1)x + 4m + 6$.

Định những trị-số của m để cho tam-thức đó luôn luôn dương, bất-chấp x.

$$a = m + 1 \qquad b = -2(2m+1) \qquad c = 4m + 6$$

Giả-sử $a \neq 0 \Rightarrow m + 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq -1$.

Để cho tam-thức *không đổi dấu*, điều-kiện ắt có và đủ là nó vô-nghiệm, tức là $\Delta' < 0$. Khi tam-thức không đổi dấu, nó theo dấu của a, vậy để cho tam-thức luôn luôn dương ta đòi hỏi $m + 1 > 0$.

Tóm lại, ta đòi hỏi hai điều sau đây cùng một lúc :

$$\begin{cases} \Delta' < 0 & (1) \\ m + 1 > 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta' &= (2m+1)^2 - (m+1)(4m+6) \\ &= 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 10m - 6 \\ &= -6m - 5 \end{aligned}$$

$$\Delta' < 0 \Rightarrow -6m - 5 < 0 \Rightarrow m > \frac{-5}{6}$$

$$m + 1 > 0 \Rightarrow m > -1$$

Cả hai điều cùng được thỏa khi ta chọn $\mathbf{m > -\frac{5}{6}}$

A . B (ta phải giả-sử B $\neq 0$) và dấu của thương-số $\frac{A.B.C}{D.E}$ cũng giống như dấu của tích-số A.B.C.D.E (giả-sử $D \neq 0$ và $E \neq 0$).

Muốn xét dấu của $\frac{2x+3}{x-2}$ ta xét dấu của tích-số $(2x+3)(x-2)$.

Đó là một tam-thức mà nghiệm-số là $-\frac{3}{2}$ và 2.

Ta muốn có $\frac{2x+3}{x-2} > 0$, vậy ta phải chọn x ở ngoài khoảng $\left(-\frac{3}{2}\,;\,2\right)$, ta không lấy $x = -\frac{3}{2}$ và $x = 2$.

Lời dặn. — Gặp $\frac{2x+3}{x-2} > 0$, ta có thể xét dấu của $2x+3$, của $x-2$, rồi suy ra dấu của vế thứ nhất; sau đó, chọn x để cho vế thứ nhất dương.

— Gặp $\frac{2x+3}{x-2} > 0$, ta không được viết $2x+3 > 0$, vì ta không dám nhân hai vế với biểu-thức $x-2$ mà ta *chưa biết dấu.*

— Gặp $\frac{2x+3}{x-2} > 5$, ta không được viết $2x+3 > 5(x-2)$, vì ta không dám nhân hai vế với biểu-thức $x-2$ mà ta *chưa biết dấu.* Ta phải chuyển 5 về bên trái :

$$\frac{2x+3}{x-2} - 5 > 0$$

$$\frac{2x+3-5(x-2)}{x-2} > 0$$

$$\frac{-3x+13}{x-2} > 0$$

Sau đó, ta lại tiếp-tục theo phương-pháp đã nói ở thí-dụ trên.

Thí-dụ 2. Giải bất-phương-trình $\frac{2x + 1}{x - 1} < \frac{2x - 1}{x - 2}$

Ta chuyển cả về vế thứ nhất : $\frac{2x + 1}{x - 1} - \frac{2x - 1}{x - 2} < 0$

Lấy mẫu-số chung (*không được bỏ mẫu-số chung*) :

$$\frac{(2x - 1)(x - 2) - (2x - 1)(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)} < 0$$

$$\frac{-3}{(x - 1)(x - 2)} < 0$$

Ta muốn rằng vế thứ nhất phải âm ; — 3 đã âm rồi, vậy ta đòi hỏi mẫu-số phải dương :

$$(x - 1)(x - 2) > 0$$

Tam-thức ở vế thứ nhất có hai nghiệm-số là 1 và 2. Hệ-số đầu là 1.

Muốn cho tam-thức dương (nghĩa là cùng dấu với hệ-số a của x^2) ta phải chọn $x < 1$ hay là chọn $x > 2$.

Thí-dụ 3. Giải bất-phương-trình $\frac{6x + 2}{3x + 9} + \frac{x - 1}{2x + 1} > 0$

Lấy mẫu-số chung (*không bỏ được mẫu-số chung*) :

$$\frac{(6x + 2)(2x + 1) + (x - 1)(3x + 9}{(3x + 9)(2x + 1)} > 0$$

$$\frac{15x^2 + 16x - 7}{3(x + 3)(2x + 1)} > 0$$

Dấu của vế thứ nhất được suy từ dấu của tử-số $15x^2 + 16x - 7$ và dấu của mẫu-số $3(x + 3)(2x + 1)$.

Tam-thức $15x^2 + 16x - 7$ có hai nghiệm-số là $-\frac{7}{5}$ và $\frac{1}{3}$

Tam-thức $3(x+3)(2x+1)$ có hai nghiệm-số là -3 và $-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		-3		$-\frac{7}{5}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$-\infty$
Tử-số		+		+	0	—		—	0	+	
Mẫu-số		+	0	—		—	0	+		+	
Vế nhất		+	‖	—	0	+	‖	—	0	+	

Ta muốn cho vế thứ nhất dương, vậy ta chọn

$$x < -3 \; ; \; -\frac{7}{5} < x < -\frac{1}{2} \; ; \; \frac{1}{3} < x$$

3. 4. HỆ-THỐNG BẤT-PHƯƠNG-TRÌNH.

Thí-dụ 1. Giải hệ-thống bất-phương-trình :

$$\begin{cases} -2x^2 + 3x - 1 < 0 & (1) \\ (3 + x)(5 - x) > 0 & (2) \end{cases}$$

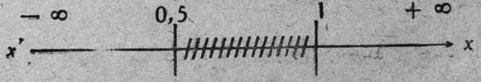
Công việc của ta là phải chọn x sao cho cả hai bất-phương-trình *cùng được nghiệm.*

Vì thế, ta phải nói rằng hai bất-phương-trình đã cho làm thành *một hệ-thống,* chúng là *hai bất-phương-trình đồng-nghiệm.*

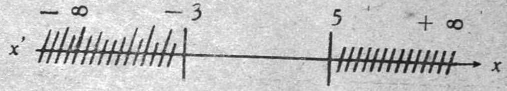
$-2x^2 + 3x - 1$ có hai nghiệm-số là $\frac{1}{2}$ và 1, hệ-số đầu là -2.

$(3 + x)(5 - x)$ có hai nghiệm-số là -3 và 5, hệ-số đầu là -1.

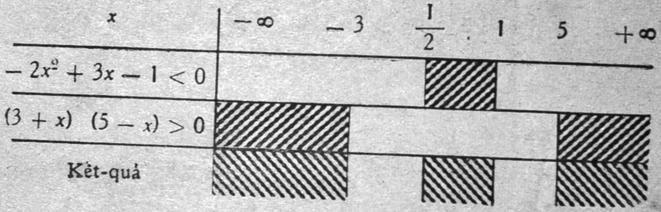
Muốn cho bất-phương-trình (1) được thỏa, ta lấy x ở khoảng không bị gạc chéo sau đây :



Muốn cho bất-phương-trình (2) được thỏa, ta lấy x ở khoảng không bị gạc chéo sau đây :


$-\infty$
-3
5
$+\infty$
x'
x

Đúc-kết những thành-tích trên, ta được :


x
$-\infty$
-3
$\frac{1}{2}$
1
5
$+\infty$
$-2x^2+3x-1<0$
$(3+x)\ (5-x)>0$
Kết-quả

Những khoảng không bị gạc chéo là :

$$(-3\ ;\ 0{,}5)\cdot \qquad (1\ ;\ 5)$$

Vậy cả hai bất-phương-trình cùng được nghiệm khi

$$\mathbf{-3 < x < 0{,}5 \quad \text{và} \quad 1 < x < 5}$$

Thí-dụ 2. **Giải các bất-phương-trình đồng-nghiệm :**

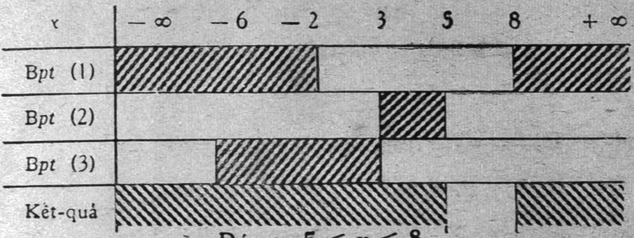
$$\begin{cases} x^2-6x-16<0 & (1)\\ x^2-8x+15>0 & (2)\\ \dfrac{1}{1-3}+\dfrac{1}{9}>0 & (3)\end{cases}$$

$x^2-6x-16$ có hai nghiệm-số là -2 và 8

$x^2-8x+15$ có hai nghiệm-số là 3 và 5

$\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{9}>0$ viết là $\dfrac{9+x-3}{9\,(x-3)}>0$

hay $\dfrac{x+6}{9(x-3)} > 0$. Ta xét dấu của tam-thức $(x+6)(x-3)$. Hai nghiệm-số là -6 và 3. Hệ-số đầu là $+1$.


x
$-\infty$
-6
-2
3
5
8
$+\infty$
Bpt (1)
Bpt (2)
Bpt (3)
Kết-quả

Đáp : $5 < x < 8$

BÀI TẬP

● **Giải các bất-phương-trình sau đây :**

3. 1. $(5x-3)(x-4) > 0$

3. 2. $x^2 - 20x + 99 < 0$

3. 3. $16 - x^2 < 0$

3. 4. $(x^2 - 5x + 4)(3x^2 - 5x + 8) > 0$

3. 5. $\dfrac{1}{x-2} > 1 - \dfrac{4}{x}$

3. 6. $\dfrac{x-3}{x-2} < \dfrac{3x+1}{x+2}$

3. 7. $\dfrac{x+1}{x-2} > \dfrac{x-3}{2x-1}$

3. 8. $\dfrac{x-1}{x+1} < \dfrac{2x}{x-1}$ ✗

3. 9. $(x^3 - 8)(x^2 + 1) > 0$

3. 10. $(x+1)(2x+3) < (x+1)(x^2 - 5)$

3. 11. $(2x+1)^2 - 9 > (x+2)(7x-5)$

3. 12. $(x+2)^2 < (2x-1)^2$

3. 13. $x^3 - 1 > (3x+1)(x-1)$

3. 14. $x^3 + 8 > 2(3-x)(x+2)$

- **Giải các hệ-thống bất-phương-trình sau đây :**

3. 15. $\begin{cases} x^2 - 6x - 16 > 0 \\ x^2 - 8x + 15 < 0 \end{cases}$ **3. 16.** $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x^2 - 6x < 0 \end{cases}$

3. 17. $10 < x^2 + 5x - 40 < 26$

3. 18. $-1 < \dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{1}{3} < 1$

3. 19. $-1 < \dfrac{x-5}{2x+3} < 2$

3. 20. $\begin{cases} 5x + 3 < 0 \\ x^2 - 3x - 10 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$ **3. 21.** $\begin{cases} x^2 > 16 \\ 2x + 6 < 0 \\ x^2 - 8x + 15 > 0 \end{cases}$

3. 22. $\begin{cases} x^2 + 2x > 2 \\ x^2 - 14x + 1 > 0 \\ \dfrac{5}{x-1} < \dfrac{4}{2x-5} \end{cases}$ **3. 23.** $\begin{cases} -2 < \dfrac{2}{x} < 2 \\ (x-1)^2 < (4x+2)^2 - 1 \end{cases}$

- **Định m để những bất-phương-trình sau đây được thỏa bất-chấp m :**

3. 24. $mx^2 + (m-1)x + m - 1 < 0$

3. 25. $mx^2 + 4(m+1)x + m - 5 < 0$

3. 26. $(m+1)x^2 + 4x + 2m > 0$

3. 27. $(2m-5)x^2 - (2m-5)x + 1 > 0$

- **Định m để cho phương-trình sau đây :**

3. 28. $(m-5)x^2 + 2mx + m^2 - 5m + 6 = 0$ có hai nghiệm-số trái dấu.

3. 29. $(2m-1)x^2 - (m+2)x + 3m - 1 = 0$ có hai nghiệm-số dương.

3. 30. $(m+1)x^2 - 2(3m-1)x + 2m + 1 = 0$ có hai nghiệm-số âm.

3. 31. *Định m để phương-trình sau này có hai nghiệm-số dương :*

a) $(m-3)x^2 - 2mx + m - 1 = 0$

b) $\dfrac{m}{3}x^2 - (2m+1)x + 3m - 2 = 0$

3. 32. *Định m đề phương-trình sau này có hai nghiệm-số âm :*

a) $(m + 1)x^2 - 2(m + 2)x + m - 3 = 0$

b) $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 3 = 0$

3. 33. *Định m đề những phương-trình sau này có hai nghiệm-số trái dấu nhau :*

a) $(m - 2)x^2 - 2mx + m + 4 = 0$

b) $(m - 1)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$

3. 34. *Định m đề phương trình sau này có hai nghiệm-số trái dấu nhau và nghiệm-số âm có trị-số tuyệt-đối lớn hơn nghiệm-số dương :*

$$(m + 4)x^2 - 2(m + 1)x + m - 3 = 0$$

4. VỊ-TRÍ CỦA MỘT SỐ ĐỐI VỚI HAI NGHIỆM-SỐ CỦA MỘT TAM-THỨC BẬC HAI

4. 1. ĐẶT VẤN-ĐỀ.

Cho tam-thức $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Ta hãy so-sánh -1 với hai nghiệm-số của tam-thức đó.

Giải phương-trình $f(x) = 0$ ta thấy hai nghiệm-số là $x' = 2$ và $x'' = 3$.

So-sánh số -1 với hai nghiệm-số đó thì được $-1 < x' < x''$.

Bây giờ ta có tam-thức $ax^2 + bx + c = f(x)$ và một số α. Ta hãy tìm cách so-sánh số α với hai nghiệm-số của tam-thức đó, mà *không được giải phương-trình* $f(x) = 0$.

4. 2. NHẮC LẠI KẾT-QUẢ CŨ.

Khi học về dấu của tam-thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, ta đã biết rằng :

— nếu tam-thức không có nghiệm-số thì dù x có trị-số α nào đó, $f(x)$ cũng cùng dấu với a, nghĩa là $a \cdot f(\alpha) > 0$

— nếu tam-thức có nghiệm-số kép thì dù x có trị-số α nào đó $\left(\alpha \neq -\dfrac{b}{2a}\right)$ $f(x)$ cũng cùng dấu với a, nghĩa là $a \cdot f(\alpha) > 0$

— nếu tam-thức có hai nghiệm-số x', x'' và nếu x có một trị-số

α ở ngoài khoảng $(x' ; x'')$ thì $a . f(\alpha) > 0$

α ở ngoài khoảng $(x' ; x'')$ thì $a . f(\alpha) < 0$

1. **$\Delta < 0$, α bất-kỳ . . . . . $af(\alpha) > 0$**

2. **$\Delta = 0$, $\alpha \neq -\frac{b}{2a}$ . . . . . $af(\alpha) > 0$**

3. **$\Delta = 0$ $\begin{cases} \alpha \text{ ngoài khoảng } (x' ; x'') \ldots af(\alpha) > 0 \\ \alpha \text{ trong khoảng } (x' ; x'') \ldots af(\alpha) < 0 \end{cases}$**

4. 3. ĐỊNH-LÝ ĐẢO.

1. **Nếu af $(\alpha) < 0$ thì tam-thức f (x) có hai nghiệm-số và α ở trong khoảng hai nghiệm-số đó.**

Thật vậy, nhìn bảng trên, thấy rằng điều-kiện $af(\alpha) < 0$ đòi hỏi hai điều-kiện $\Delta > 0$, và $x' < \alpha < x''$, bởi vì trong mọi trường-hợp khác ta sẽ có $af(\alpha) \geqslant 0$.

2. **Nếu af $(\alpha) > 0$ và nếu tam-thức có nghiệm-số thì α ở ngoài khoảng hai nghiệm-số đó.**

Bảng trên chứng tỏ điều đó.

4. 4. CÁCH SO-SÁNH MỘT SỐ α VỚI HAI NGHIỆM-SỐ.

Cho tam-thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ và một số α. Khi phải so-sánh α với hai nghiệm-số của tam-thức, ta làm như sau : tính $a.f(\alpha)$*

1. Nếu $\boxed{\mathbf{af(\alpha) = 0}}$ thì ta kết-luận ngay rằng α là một nghiệm-số của tam-thức : $x' = \alpha$.

---

* *Nếu a là số dương thì ta chỉ cần tính f (α) thôi.*

Muốn tìm nốt nghiệm-số kia, ta dùng một trong hai cách :

— Dùng $P = x' . x'' = \frac{c}{a}$, do đó $x'' = \frac{c}{ax'} = \frac{c}{a\alpha}$.

— Dùng $S = x' + x'' = -\frac{b}{a}$, do đó $x'' = -\frac{b}{a} - x' = -\frac{b}{a} - \alpha$.

2. Nếu $\boxed{\mathbf{af}\,(\alpha) < 0}$ thì ta kết-luận ngay rằng :

— tam-thức có hai nghiệm-số.

— α *ở trong* khoảng hai nghiệm-số đó : $x' < \alpha < x''$.

3. Nếu $\boxed{\mathbf{af}\,(\alpha) > 0}$ thì ta chưa kết-luận ngay được điều gì cả.

Ta hãy xét dấu của biệt-số để xem tam-thức có hai nghiệm-số không.

Nếu $\Delta = 0$ thì ta tính ngay ra được nghiệm-số kép rồi so-sánh *trực-tiếp* với α.

Giả-sử $\Delta > 0$. Như thế thì tam-thức có hai nghiệm-số và α *ở ngoài khoảng hai nghiệm-số đó.*

Vậy ta có một trong hai kiểu xếp-đặt sau đây :

hoặc $\alpha < x' \leq x''$ hoặc $x' \leq x'' < \alpha$

Để quyết-định rõ-ràng xem α ở bên phải hay ở bên trái của x', x'' ta có thể so-sánh α với *một số mà ta biết chắc là ở trong khoảng hai nghiệm-số.* Thí-dụ như tam-thức có a, c khác dấu nhau, vậy hai nghiệm-số x', x'' khác dấu nhau, tức là 0 ở trong khoảng $(x' ; x'')$. Ta chỉ việc so-sánh α với 0 là xong.

Thường thường, ta so-sánh α với $\frac{S}{2}$ bởi vì $\frac{S}{2}$ ở trong khoảng (x', x'')

Thật vậy, giả-sử x' nhỏ hơn x'', ta có :

$$\begin{array}{c|c} x' < x'' & x' < x'' \\ x' + x' < x' + x'' & x' + x'' < x'' + x'' \\ 2x' < x' + x'' & x' + x'' < 2x'' \\ 2x' < S & S < 2x'' \\ x' < \frac{S}{2} & \frac{S}{2} < x'' \\ \searrow & \swarrow \end{array}$$

$$\mathbf{x' < \frac{S}{2} < x''}$$

Cho nên, so-sánh α với $\frac{S}{2}$ là biết vị-trí của α đối với x' và x''.

Ta lập hiệu-số $\frac{S}{2} - \alpha$.

— Nếu $\frac{S}{2} - \alpha > 0$ thì α thua $\frac{S}{2}$, do đó $\alpha < x' < \frac{S}{2} < x''$.

— Nếu $\frac{S}{2} - \alpha < 0$ thì α hơn $\frac{S}{2}$, do đó $x' < \frac{S}{2} < x'' < \alpha$.

Tóm-tắt :

$$\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

1. **af (α) = 0** . . . . **α là một nghiệm-số**

2. **af (α) < 0** . . . . **$x' < \alpha < x''$**

3. **af (α) > 0 và $\Delta \geqslant 0$**

$* \ \frac{S}{2} - \alpha > 0$ . . . . $\alpha < x' \leqq x''$

$* \ \frac{S}{2} - \alpha < 0$ . . . . $x' \leqq x'' < \alpha$

Lời dặn : So-sánh x' và x'' với 0 nghĩa là xét dấu của x', x''

4. 5. THÍ-DỤ.

1. So-sánh số 1 với hai nghiệm-số của phương-trình

$$3x^2 - 5x - 10 = 0 \qquad (a = 3 > 0).$$

Ta có $$f(1) = -12 < 0$$

Vậy $$x' < 1 < x''$$

2. So-sánh số 3 với hai nghiệm-số của phương-trình

$$x^2 - 9x + 15 = 0 \qquad (a = 1 > 0).$$

Ta có $f(3) = 0$, vậy một nghiệm-số của phương-trình là $3 : x' = 3$.

Ngoài ra $$P = \frac{c}{a} = 15 \quad \text{tức là} \quad x' \cdot x'' = 15$$

Suy ra $$x'' = \frac{15}{x'} = \frac{15}{3} = 5$$

3. So-sánh số -5 với hai nghiệm-số của phương-trình

$$3x^2 + x - 2 = 0 \qquad (a = 3 > 0)$$

Phương-trình có 2 nghiệm-số khác dấu nhau, vì a, c khác dấu nhau, do đó : $x' < 0 < x''$, $f(-5) = 68 > 0$, vậy -5 ở ngoài khoảng hai nghiệm-số. Hơn nữa, -5 nhỏ hơn 0, nên ta có : $-5 < x' < 0 < x''$

4. So-sánh số 4 với hai nghiệm-số của phương-trình

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \qquad (a = 2 > 0)$$

Ta có $$\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$$

$$f(4) = 14 > 0$$

$$\frac{S}{2} - 4 = \frac{5}{4} - 4 < 0$$

Vậy $$x'' < x'' < 4$$

5. Chứng-minh rằng tam-thức $(x - a)(x - c) - b^2$ trong đó a, b, c là ba số cho sẵn bao giờ cũng có hai nghiệm-số bất-chấp a, b, c.

Ta có :

$$f(x) = (x - a)(x - c) - b^2$$

$$f(a) = (a - a)(a - c) - b^2 = -b^2. \text{ Như thế } f(a) < 0$$

Vậy chắc-chắn $f(x)$ có hai nghiệm-số và a ở trong khoảng hai nghiệm-số đó.

4. 6. CÁCH SO-SÁNH HAI SỐ α, β VỚI HAI NGHIỆM-SỐ.*

Ta cần so-sánh hai số α, β với hai nghiệm-số của tam-thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ta lập tích-số $f(\alpha) . f(\beta)$.

1. Nếu thấy $\boxed{f(\alpha) . f(\beta) < 0}$ thì ta có thể viết như sau :

$$a^2 . f(\alpha) . f(\beta) < 0$$

$$af(\alpha) . af(\beta) < 0$$

Vậy một trong hai biểu-thức $af(\alpha)$, $af(\beta)$ phải âm, nghĩa là một trong hai số α và β phải ở trong khoảng hai nghiệm-số x', x'' của tam-thức.

Nhưng ta chưa biết *rõ-ràng* là số nào ở trong khoảng hai nghiệm-số x', x''.

Muốn quyết-định, ta lại phải xét riêng dấu của $af(\alpha)$ hoặc của $af(\beta)$.

2. Nếu thấy $\boxed{f(\alpha) . f(\beta) > 0}$ thì ta không thể kết-luận điều gì cả. Ta phải làm những việc sau này :

a) Xét dấu của Δ để xem những tam-thức có nghiệm-số không.

Giả-sử $\Delta > 0$.

---

* Xem thêm để biết.

b) Xét dấu của $af(\alpha)$ và $\frac{S}{2} - \alpha$ để so-sánh α với x' và x''.

c) Xét dấu của $af(\beta)$ và $\frac{S}{2} - \beta$ để so-sánh β với x' và x''.

4. 7. CÁCH BIỆN-LUẬN PHƯƠNG-TRÌNH CÓ THÔNG-SỐ.

Theo m, khảo-sát vị-trí của số − 2 với hai nghiệm-số của phương-trình :

$$(m - 3)x^2 - 2(3m + 1)x + 9m - 2 = 0 \qquad (1)$$

Nếu **m** = **3**, ta có phương-trình bậc nhất $-20x + 25 = 0$; $x = \frac{5}{4}$

Giả-sử **m** $\neq$ **3**.

Phương-trình (1) là một phương-trình bậc hai mà các hệ-số là :

$$a = m - 3 \quad ; \quad b' = -(3m + 1) \quad ; \quad c = 9m - 2$$

- **Biệt-số là :**

$$\Delta' = b'^2 - ac = (3m + 1)^2 - (9m - 2)(m - 3)$$
$$= 35m - 5$$

Δ' là một nhị-thức bậc nhất mà nghiệm-số là $m = \frac{1}{7}$

Dấu của Δ' :

m	$-\infty$		$\frac{1}{7}$		$+\infty$
Δ'		$-$	0	$+$	

- **Tính af (− 2) :**

$$af(-2) = (m - 3) \cdot f(-2) = (m - 3)(25m - 10)$$
$$= 5(m - 3)(5m - 2)$$

Dấu của $af(-2)$:

m	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		3		$+\infty$
$af(-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Tính $\frac{S}{2} + 2$:

$$\frac{S}{2} + 2 = \frac{3m + 1}{m - 3} + 2 = \frac{5(m-1)}{m - 3}$$

Dấu của $\frac{S}{2} + 2$:

m	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$\frac{S}{2} + 2$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

Những trị-số đáng chú-ý của m theo thứ-tự là :

$$\frac{1}{7} \qquad \frac{2}{5} \qquad 1 \qquad 3$$

m	Δ'	$af(-2)$	$\frac{S}{2} + 2$	KẾT-LUẬN
$+\infty$				
	$+$	$+$	$+$	$-2 < x' < x''$
3		0		bậc nhất $x = \frac{5}{4}$
	$+$	$-$	$-$	$x' < -2 < x''$
1			0	$x = -\frac{-4 \pm \sqrt{30}}{2}$
	$+$	$-$	$+$	$x' < -2 < x''$
$\frac{2}{5}$		0		$x' = -2 \quad x'' = \frac{4}{13}$
	$+$	$+$	$+$	$-2 < x' < x''$
$\frac{1}{7}$	0			$x' = x'' = -\frac{1}{3}$
	$-$	$+$	$+$	vô-nghiệm
$-\infty$				

4. 8. CÁCH XẾP-ĐẶT ĐƯỢC ĐỊNH TRƯỚC.

Cho phương-trình $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, trong đó a, b, c phụ-thuộc vào thông-số m và cho hai số α, β. Gọi nghiệm-số của phương-trình là x', x''.

Hãy định m để cho những sự xếp-đặt sau đây xảy ra :

1. $x' < \alpha < \beta < x''$

2. $\alpha < x' < \beta < x''$

3. $x' < \alpha < x'' < \beta$

4. $\alpha < x' < x'' < \beta$

Ta chỉ việc viết những điều-kiện để cho hai số α, β và hai nghiệm-số x', x'' — nếu có — đứng theo thứ-tự cho sẵn.

1. Muốn có $x' < \alpha < \beta < x''$ thì viết :

$$\begin{cases} af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) < 0 \end{cases}$$

2. Muốn có $\alpha < x' < \beta < x''$ thì viết :

$$\begin{cases} af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) < 0 \end{cases}$$

3. Muốn có $x' < \alpha < x'' < \beta$ thì viết :

$$\begin{cases} af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) > 0 \end{cases}$$

4. Muốn có $\alpha < x' < x'' < \beta$ thì viết :

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} - \alpha > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \dfrac{S}{2} - \beta < 0 \end{cases}$$

Bài toán rút lại là : giải nhiều bất-phương-trình đồng-nghiệm.

Chú-thích : Nếu chỉ muốn có *một trong hai số* α và β ở trong khoảng hai nghiệm-số — *mà không nói rõ số nào* — thì chỉ việc giải bất-phương-trình :

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$$

BÀI TẬP

- **Theo m, so-sánh những số cho sẵn với những nghiệm-số của phương-trình sau :**

	số cho :
4. 1. $(2m+1)x^2+2x+m+1=0$	4
4. 2. $x^2+2(m+1)x+2m=0$	-1
4. 3. $(2m-3)x^2-2(m+1)x+m+7=0$	2
4. 4. $mx^2-2(m-2)x+m-3=0$	0 và $\frac{1}{2}$
4. 5. $(m+2)x^2+(3m-2)x+3-m=0$	-1 và -5

- **Định m để cho những phương-trình sau đây có hai nghiệm-số ở trong khoảng hai số cho sẵn :**

	số cho :
4. 6. $(2m-1)x^2-(m-1)x+m+1=0$	$-1, +2$
4. 7. $(2-3m)x^2+2(5m-2)x-3(2m+1)=0$	$1, \quad 3$

- **Định m để cho những phương-trình sau đây có nghiệm-số thỏa cho một sự xếp-đặt biết trước :**

4. 8. $x^2-3mx+m-3=0$	$x' < x'' < 1$
4. 9. $(m-1)x^2-mx+m-3=0$	$x' < 3 < x''$
4. 10. $x^2-2(m+1)x+m^2+1=0$	$1 < x' < x'' < 5$
4. 11. $3mx^2-(m-3)x+m-2=0$	$x' < 1 < x'' < 2$
4. 12. $x^2-2mx+m+2=0$	$1 < x' < x''$
4. 13. $mx^2-2(m+1)x+m-1=0$	$x' < \frac{1}{2} < 2 < x''$
4. 14. $(3m-2)x^2+2mx+3m=0$	$0 < x' < 1 < x''$

- **Chứng-minh rằng những phương-trình sau đây chắc-chắn có nghiệm-số mà không cần tính biệt-số :**

4. 15. $(x - 1)(x - 4) + (x - 2)(x - 5) = 0$

4. 16. $(x - 1)(3 - x) - a\left(x - \frac{5}{2}\right) = 0$

4. 17. $mx(x - 2) + x^2 - 5 = 0$

4. 18. $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x - c} = 0$ (với $a > b > c$)

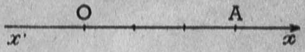
4. 19. $(x + h)(ix - 2h) + h - 5x = 0$ [nên tính $f(-h) \cdot f(2h)$]

5. TỌA-ĐỘ

1. CÁCH ĐỊNH CHỔ MỘT ĐIỀM Ở TRÊN MỘT TRỤC.

5. 1. HOÀNH-ĐỘ.

a) Trên một trục chia độ $x'x$, ta chọn một điềm O làm gốc. Coi điềm A. Vectơ OA có gốc là O, có ngọn là A. Đoạn OA bằng ba đơn-vị và vectơ OA cùng chiều với trục $x'x$.



Hình 1

Ta nói rằng :

— số đo đại-số của vectơ OA là $+3$

— hoành-độ của điềm A đối với gốc O là $+3$ và ta ký-hiệu $\overline{\mathrm{OA}} = +3$ hoặc $x_A = +3$.

Hoành-độ của một điềm ở trên một trục là số đo đại-số của vectơ mà gốc là gốc hoành-độ và ngọn là chính điềm đó.

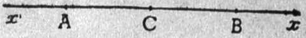
Chú-ý. Sau này khi thấy $\overline{\mathrm{OA}} = +3$, đáng lẽ ta nói : « số đo đại-số của vectơ OA là $+3$ » thì ta nói ngắn hơn « OA đại-số bằng $+3$ ».

b) **Hoành-độ của một điểm dùng để định vị-trí của điểm đó ở trên trục.**

Thật vậy, trên trục $x'\mathrm{O}x$, nếu ta biết điềm A thì ta biết $\overline{\mathrm{OA}}$. Ngược lại, nếu ta biết $\overline{\mathrm{OA}}$ thì ta tìm được điềm A, không sợ nhầm lẫn với điềm khác.

5. 2. HỆ-THỨC CHASLES.

Trên một trục, ta có ba điểm A, B, C.



Hình 2

Dù A, B, C được xếp-đặt theo thứ-tự nào chăng nữa, ta cũng có hệ-thức :

$$\boxed{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0} \qquad (1)$$

Đó là *hệ-thức Chasles.*

Nếu ta gặp nhiều điểm thẳng hàng ABCDEF, ta viết :

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FA} = 0$$

Hệ-thức (1) thường được viết là

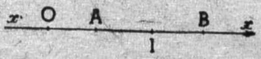
$$\overline{AB} = -\overline{CA} - \overline{BC}$$

Nhưng $-\overline{BC} = \overline{CB}$ và $-\overline{CA} = \overline{AC}$ nên ta có :

$$\boxed{\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}} \qquad (2)$$

Hệ-thức (2) được dùng luôn.

5. 3. SỐ ĐO ĐẠI-SỐ CỦA MỘT VECTƠ.



Hình 3

Giả-sử ta biết hoành-độ của hai điểm A, B ở trên trục $x'x$.

Ta hãy tính số đo đại-số của vectơ AB. Theo hệ-thức Chasles, ta có :

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

$$\boxed{\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}} \quad \text{hay} \quad \boxed{\overline{AB} = x_B - x_A}$$

Điều đó tỏ rằng : **số đo đại-số của một vectơ ở một trục bằng hoành-độ điểm ngọn trừ hoành-độ điểm gốc.**

Nên chú-ý rằng : Chỉ khi nào một vectơ nằm trên một *trục*, nó mới có số đo đại-số.

Nếu một vectơ đứng một mình, hay vectơ nằm trên một đường thẳng, nó chỉ có *độ dài* (hay *cường-độ*, hay *suất*) mà thôi.

5. 4. HOÀNH-ĐỘ TRUNG-ĐIỂM CỦA MỘT ĐOẠN.

Giả-sử ta biết hoành-độ của hai điểm A và B ở trên trục $x'x$. Ta hãy tính hoành-độ của điểm I, trung-điểm đoạn AB.

Theo hệ-thức Chasles, ta có

$$\overline{OI} = \overline{OA} + \overline{AI}$$

$$\overline{OI} = \overline{OB} + \overline{BI}$$

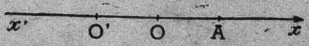
Cộng vế, ta được

$$2\,\overline{OI} = \overline{OA} + \overline{OB} + \underbrace{\overline{AI} + \overline{IB}}_{\text{zêrô}}$$

Do đó $\boxed{\overline{OI} = \dfrac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}}$ hay $\boxed{x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}}$

5. 5. CÁCH ĐỔI GỐC HOÀNH-ĐỘ.

Trên trục $x'x$, gốc cũ là O, hoành-độ của A đối với O là $\overline{OA} = x$.



Hình 4

Nay ta coi điểm O′ mà hoành-độ đối với O là $\overline{OO'} = x_0$.

Ta hãy lấy gốc mới là O'. Ta xét xem hoành-độ $X = \overline{O'A}$ của A với O' là bao nhiêu. Theo hệ-thức Chasles, ta có :

$$\overline{O'A} = \overline{O'O} + \overline{OA} = \overline{OA} - \overline{OO'}$$

tức là $$\boxed{X = x - x_0}$$

Muốn biết hoành-độ mới của một điểm, ta lấy hoành-độ cũ của nó trừ đi hoành-độ của gốc mới đối với gốc cũ.

2. CÁCH ĐỊNH CHỖ MỘT ĐIỂM TRONG MẶT PHẲNG.

5. 6. TỌA-ĐỘ.

a) Trong mặt phẳng, ta kẻ một *hệ-thống trục tọa-độ* $x'Ox$, $y'Oy$ *thẳng góc* với nhau. Giả-sử hai trục đã được chia độ.

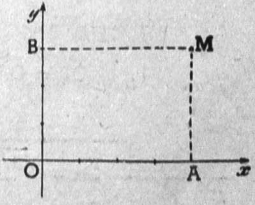
Thường thường, ta lấy đơn-vị trên hai trục dài bằng nhau. Ta nói rằng ta có một *hệ-trục trực-chuẩn.*

Coi một điểm M bất-kỳ. Ta chiếu thẳng điểm M xuống hai trục thành A, B.

Theo định-nghĩa thì :

$\overline{OA} = x$ gọi là hoành-độ của M.

$\overline{OB} = y$ gọi là tung-độ của M.



Hình 5

Hoành-độ và tung-độ của M gọi chung là tọa-độ của M. Ta viết M (x_M, y_M).

b) **Tọa-độ của một điểm dùng để định rõ vị-trí của điểm đó có trong mặt phẳng. Thật vậy :**

Nếu biết điểm M thì ta có thể định được tọa-độ x, y của nó.

Ngược lại, nếu biết tọa-độ x, y của điềm M thì ta tìm được điềm M không sợ lầm lẫn với điềm khác.

Nếu ta chỉ biết hoành-độ của M thôi, thí-dụ $x_M = 3$, thì điềm M *không được định rõ*, nó là *bất cứ* điềm nào nằm trên đường thẳng thẳng góc với trục $x'x$ tại điềm mà hoành-độ là 3.

Tương-tự, nếu ta chỉ biết tung-độ của M thôi, thí-dụ $y_M = 3$, thì điềm M là *bất-cứ* điềm nào nằm trên đường thẳng thẳng góc với trục $y'y$ tại điềm mà tung-độ là 2.

Khi một điềm nằm trên trục x'x thì tung-độ của nó là zêrô và đảo lại.

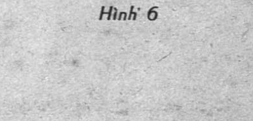
Khi một điềm nằm trên trục y'y thì hoành-độ của nó là zêrô và đảo lại.

5. 7. TỌA-ĐỘ CỦA TRUNG-ĐIỂM MỘT ĐOẠN.

Ta coi hai điềm A (x_A, y_A), B (x_B, y_B)

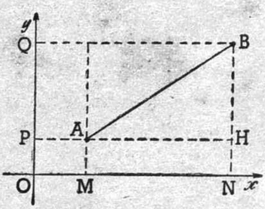
Tọa-độ trung-điềm I của đoạn đó tính bằng những công-thức sau này :

$$\boxed{\begin{aligned} x_I &= \frac{x_A + x_B}{2} \\[1em] y_I &= \frac{y_A + y_B}{2} \end{aligned}}$$



Hình 6

5. 8. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐIỂM.



Hình 7

Giả-sử ta dùng hệ-trục trực-chuẩn. Muốn tính khoảng-cách giữa hai điểm A (x_A, y_A) và B (x_B, y_B) thì ta dùng định-lý Pythagore.

Ta có :

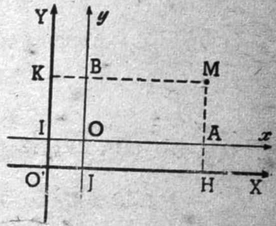
$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

$$AB^2 = (\overline{ON} - \overline{OM})^2 + (\overline{OQ} - \overline{OP})^2$$

$$\boxed{AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Chú-ý. Ta không cần phải tôn-trọng thứ-tự của hai chữ A, B trong công-thức trên đây.

5. 9. CÔNG-THỨC ĐỔI TRỤC.



Hình 8

Coi một điểm M trong mặt phẳng. Gọi tọa-độ của nó đối với hệ-thống trục Ox, Oy là x, y. Ta lấy một điểm O' và vẽ hai trục O'X, O'Y song song cùng chiều với những trục cũ.

Ta tìm xem tọa-độ X, Y của M đối với hệ-thống mới là bao nhiêu.

Gọi tọa-độ của O' đối với trục cũ Ox, Oy là x_0, y_0.

Ta có $\overline{OA} = x$; $\overline{OB} = y$; $\overline{OI} = x_0$; $\overline{OJ} = y_0$

$$\overline{O'H} = X \; ; \; \overline{O'K} = Y$$

Hệ thức Chasles cho ta $\overline{OA} = \overline{OI} + \overline{IA} = \overline{OI} + \overline{O'H}$

$$\overline{OB} = \overline{OJ} + \overline{JB} = \overline{OJ} + \overline{O'K}$$

Suy ra

$x = x_0 + X$ tức là $\boxed{X = x - x_0}$

$y = y_0 + Y$ tức là $\boxed{Y = y - y_0}$

Đó là những *công-thức đổi trục.*

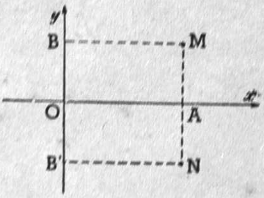
5. 10. ĐIỂM ĐỐI-XỨNG NHAU.

1. Khi hai điểm M, N *đối-xứng nhau qua trục x'x* thì tọa-độ của điểm thứ nhất là x, y ; tọa-độ của điểm thứ nhì là $x, -y$ (*h. 9*).

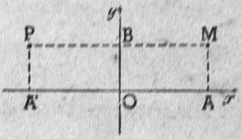
Ta giữ nguyên x, ta đổi dấu của y.

2. Khi hai điểm M, P *đối-xứng nhau qua trục y'y* thì tọa-độ của điểm thứ nhất là x, y ; tọa-độ của điểm thứ nhì là $-x, y$ (*h. 10*).

Ta giữ nguyên y, ta đổi dấu của x.



Hình 9



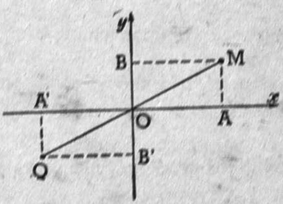
Hình 10

3. Khi hai điểm M, Q *đối-xứng nhau qua gốc tọa-độ*, thì tọa-độ của điểm thứ nhất là x, y ; tọa-độ của điểm thứ nhì là $-x, -y$ (*h. 11*).

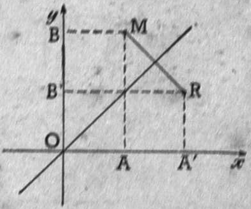
Ta đổi dấu của x và của y.

4. Khi hai điểm M, R *đối-xứng nhau qua đường phân-giác thứ nhất*, thì tọa-độ của điểm thứ nhất là x, y ; tọa-độ của điểm thứ nhì là y, x (*h. 12*).

Ta đổi nhiệm-vụ của x và y lẫn cho nhau.



Hình 11



Hình 12

3. ĐƯỜNG THẲNG

5. 11. PHƯƠNG-TRÌNH.

1. *Phương-trình* của một đường thẳng đi qua gốc tọa-độ có dạng $y = ax$.

a gọi là *hệ-số góc* hay *độ dốc.*

2. *Phương-trình* của một đường thẳng không đi qua gốc tọa-độ có dạng $y = ax + b$.

a gọi là *hệ-số góc* hay *độ dốc.* b gọi là *tung-độ gốc.*

3. *Định phương-trình* của một đường thẳng là tìm a và b.

5. 12. ĐƯỜNG THẲNG ĐẶC-BIỆT.

1. Đường thẳng $y = k$ (hằng-số) song-song với trục hoành-độ. Đường thẳng $y = 0$ là trục hoành-độ.

2. Đường thẳng $x = k$ (hằng-số) song-song với trục tung-độ. Đường thẳng $x = 0$ là trục tung-độ.

3. Đường thẳng $y = x$ là đường phân-giác thứ nhất, đường thẳng $y = -x$ là đường phân-giác thứ nhì (điều-kiện : *hai trục chia độ giống nhau*).

5. 13. ĐƯỜNG THẲNG THẲNG GÓC, SONG-SONG.

Coi hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$.

1. Nếu $\boxed{a = a'}$ thì chúng song-song với nhau (chúng trùng nhau khi thêm điều-kiện $b = b'$ nữa). Ngược lại, nếu chúng song-song với nhau thì $a = a'$.

2. Nếu $\boxed{a \,.\, a' = -1}$ thì chúng thẳng góc với nhau ; và ngược lại, nếu chúng thẳng góc với nhau thì $a \,.\, a' = -1$.

5. 14. TÌM PHƯƠNG-TRÌNH CỦA ĐƯỜNG THẲNG.

1. Tìm phương-trình của đường thẳng đi qua A (x_0, y_0) và B (x_1, y_1)

Phương-trình phải tìm có dạng-thức $y = ax + b$.

Tọa-độ của A và B làm thỏa cho hệ-thức viết trên, nên ta có :

$$y_0 = ax_0 + b \qquad (1)$$

$$y_1 = ax_1 + b \qquad (2)$$

Suy ra $\quad y_1 - y_0 = a\,(x_2 - x_0)$

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

(1) cho $\quad b = y_0 - ax_0 = y_0 - x_0 \,.\, \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

Vậy phương-trình phải tìm là :

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\,x + y_0 - x_0 \,.\, \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

hay $\quad y - y_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\,(x - x_0)$

Vậy $\quad \boxed{\dfrac{\mathbf{y} - \mathbf{y}_0}{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0} = \dfrac{\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0}}$

Chú-ý. Độ dốc của đường thẳng đi qua hai điểm A, B (như ta vừa tính trên) là :

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0}}$$

2. Tìm phương-trình của đường thẳng đi qua điểm A (x_0, y_0) và có độ dốc là m.

Phương-trình phải tìm có dạng-thức $y = ax + b$; ở đây $a = m$, ta chỉ còn phải tìm b. Thay x, y bằng tọa-độ của A, ta có :

$$y_0 = mx_0 + b$$

Do đó $$b = y_0 - mx_0$$

Phương-trình phải tìm là

$$y = mx + y_0 - mx_0$$

hay $$\boxed{\mathbf{y - y_0 = m\,(x - x_0)}}$$

Ta còn viết $$\boxed{\mathbf{\frac{y - y_0}{x - x_0} = m}}$$

BÀI TẬP

5 1. *Phương-trình của một đường thẳng là $y = 2x - 5$. Hãy tìm phương-trình của đường thẳng đối xứng với nó qua trục hoành-độ, qua trục tung-độ, qua gốc tọa-độ*

5 2. *Tìm phương-trình của một đường đi qua A $(2, 5)$ và B $(-2, 3)$.*

5. 3 *Tìm phương-trình của một đường thẳng đi qua A $(1, 3)$ và có độ dốc là 2.*

5. 4. *Tìm phương-trình của đường thẳng đi qua A $(4, -3)$ và thẳng góc với đường $y = 2x + 1$.*

5. 5 *Một điểm M có tọa-độ là x, y.*

Tìm quỹ-tích của M khi $2x - 3y = 6$.

M ở trong miền nào của mặt phẳng khi $2x - 3y > 6$?

5. 6 *Tọa-độ của một điểm M là $x = 2m + 1$ và $y = m - 1$, m là một thông-số.*

1. *Định vị-trí của M khi $m = 0$, khi $m = 2$.*
2. *Tìm hệ thức giữa x y độc lập đối với m. Suy ra quỹ-tích của M.*

6. ĐẠI-CƯƠNG VỀ HÀM-SỐ

6. 1. BIẾN-SỐ.

Khi một số x có thể có bất-cứ trị-số nào từ $-\infty$ đến $+\infty$ thì ta nói rằng nó là một *biến-số độc-lập*.

Đôi khi, ta phải lựa chọn trị-số để gán cho biến số : ta coi biểu-thức $\sqrt{3-x}$ chẳng-hạn, biểu-thức đó chỉ có ý-nghĩa khi mà $3 - x \geqq 0$ nghĩa là $x \leqq 3$. Vậy thì biến-số x chỉ có thể có những trị-số lớn hơn hay bằng 3.

Sau này, ta gọi biến-số độc-lập là *biến-số* cho tiện.

6. 2. KHOẢNG.

Ta coi hai số a và b ($a < b$). *Toàn-thể những trị-số bao-hàm giữa a và b mà không kể a, b gọi là một khoảng hở. Toàn-thể những trị-số bao-hàm giữa a và b kể cả a và b gọi là một khoảng kín.*

Số nhỏ a gọi là *cận dưới* của khoảng.

Số lớn b gọi là *cận trên* của khoảng.

Viết $]a, b[$ thì không kể cận : đó là *khoảng hở*.

Viết $[a, b]$ thì kể cả cận a, b : đó là *khoảng kín*.

Ta nói rằng *biến-số x biến-thiên trong khoảng* $[a, b]$ *khi mà x có thể có bất-cứ trị-số nào bao-hàm giữa a và b, kể cả a và b.*

Biểu-thức $\sqrt{x(5-x)}$ chỉ có nghĩa khi $0 \leqq x \leqq 5$. Như thế là x biến-thiên trong khoảng $[\,0, 5\,]$.

Biểu-thức $\dfrac{7}{\sqrt{(3-x)\ (x-6)}}$ chỉ có nghĩa khi $(3-x)(x-6) > 0$ nghĩa là khi $3 < x < 6$. Như thế x biến-thiên trong khoảng $]\,3, 6\,[$.

Một đôi khi ta gặp trường-hợp trong đó chỉ có một cận bị gạt ra.

Khi viết $[\,3, 5\,[$ thì ta có kể 3 nhưng gạt 5 ra.

6. 3. HÀM-SỐ.

Có hai lượng y và x. Khi cho x một trị-số mà y cũng có một trị-số tương-ứng nhất-định thì ta nói y làm *hàm-số* của x. Muốn chỉ rằng y là hàm-số của x thì người ta viết $x = f(x)$, và đọc y bằng f theo x.

Thí-dụ :

a) Coi hệ-thức $y = 2x - 1$

Cứ cho x là một trị-số nào đó thì tính được trị-số tương-ứng của y. Thật thế :

Khi $x = 1$ thì $y = 1$

Khi $x = 5$ thì $y = 9$

Khi $x = -2$ thì $y = -5$ v.v...

b) Gọi y là chiều dài một thanh đồng và x là nhiệt-độ của nó. Ở một nhiệt-độ nhất-định, thanh đồng có một chiều dài tương-ứng rõ-rệt. Như thế, chiều dài y của thanh đồng là hàm-số của nhiệt-số x.

Chú-thích.

a) $y = f(x)$ chỉ là một lối ký-hiệu. Ta có thể viết

$y = h(x)$ hay $y = g(x)$, $y = \varphi(x)$ v.v...

b) Có khi hàm-số y phụ-thuộc vào nhiều biến-số x, u.

Lúc đó ta viết $y = f(x, u)$

Thể-tích V của một hình trụ phụ-thuộc vào bán-kính đáy R và chiều cao h, vì thế ta viết

$$V = f(R, h)$$

6. 4. HÀM-SỐ XÁC-ĐỊNH.

Nói rằng hàm-số $y = f(x)$ được *xác-định* trong khoảng (a, b) có nghĩa là : khi cho x một trị-số nào đó trong khoảng (a, b) thì có thể tính được y.

Thí-dụ :

1. Hàm-số $y = 2x + 1$ được xác-định với mọi trị-số của x.

2. Hàm số $y = \sqrt{x - 3}$ chỉ được xác-định khi $x - 3 \geqslant 0$ nghĩa là khi $x \geqslant 3$.

Nói một cách khác, hàm-số đó chỉ xác-định trong khoảng $[3, + \infty]$

3. Hàm-số $y = \sqrt{(x - 2)(x - 5)}$ chỉ được xác-định khi

$$(x - 2)(x - 5) > 0$$

nghĩa là khi $x \leqq 2$ và khi $x > 5$

Vậy hàm-số đó chỉ xác-định trong hai khoảng

$$]-\infty, 2] \quad \text{và} \quad [5, + \infty[$$

4. Hàm-số $y = \dfrac{2}{x - 1}$ không được xác-định khi $x - 1 = 0$ tức là khi $x = 1$.

6. 5. HÀM-SỐ ĐỒNG-BIẾN, NGHỊCH-BIẾN.

1. Coi hàm-số $y = f(x)$.

— Khi x lớn lên mà y cũng lớn lên, hoặc khi x nhỏ đi mà y cũng nhỏ đi, thì ta nói rằng y là một hàm-số *đồng-biến.*

— Khi x lớn lên mà y nhỏ đi, hoặc x nhỏ đi mà y lớn lên, thì ta nói rằng y là một hàm-số *nghịch-biến.*

2. Ta hãy định-nghĩa tính đồng-biến và nghịch-biến cách rõ-ràng hơn. Ta lấy hai trị-số x_0 và x_1 của biến-số x (trong khoảng mà hàm-số được xác-định) và hai trị-số tương-ứng y_0 và y_1 của hàm-số y.

Nói rằng hàm-số y đồng-biến, nghĩa là $x_1 - x_0$ và $y_1 - y_0$ cùng dấu với nhau tức là $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} > 0$.

Nói rằng hàm-số y nghịch-biến, nghĩa là $x_1 - x_0$ và $y_1 - y_0$ khác dấu với nhau tức là $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} < 0$.

6. 6. CỰC-ĐẠI, CỰC-TIỂU.

Coi một hàm-số $y = f(x)$ xác-định khi $x = a$.

Nói rằng hàm-số $y = f(x)$ qua một *cực-đại* khi $x = a$ có nghĩa là : y đang đồng-biến, đến lúc $x = a$ thì nó bắt đầu trở thành nghịch-biến.

Nói rằng một hàm-số $y = f(x)$ qua một *cực-tiểu* khi $x = a$ có nghĩa là : y đang nghịch-biến, đến lúc $x = a$ thì nó bắt đầu trở thành đồng-biến.

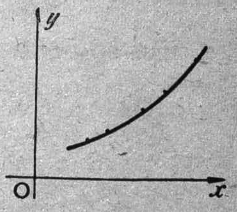
6. 7. CÁCH BIỂU-DIỄN SỰ BIẾN-THIÊN CỦA MỘT HÀM-SỐ BẰNG NÉT VẼ.

Có hàm-số $y = f(x)$.

Cứ mỗi trị-số của x lại ứng với một trị-số của y (khi hàm-số xác-định). Cặp trị-số ấy cho ta một điểm trong mặt phẳng (trên đó đã kẻ sẵn một hệ-thống trục tọa-độ).

Ta có thể lấy bao nhiêu điểm cũng được.

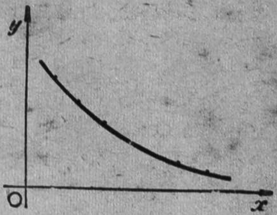
Tập-hợp những điểm ấy là một đường cong gọi là *đường biểu-diễn sự biến-thiên của hàm-số* $y = f(x)$. Gọn hơn, ta nói đó là *đường biểu-diễn* của hàm-số $y = f(x)$.



Hình 13

Khi hàm-số đồng-biến, nghĩa là khi x lớn lên mà y cũng lớn lên thì đường cong vênh lên từ trái sang phải (*h. 13*).

Khi hàm-số nghịch-biến, nghĩa là khi x lớn lên mà y nhỏ đi thì đường cong chúc xuống từ trái sang phải (*h. 14*).



Hình 14

6. 8. HÀM-SỐ CHẴN, HÀM-SỐ LẺ.

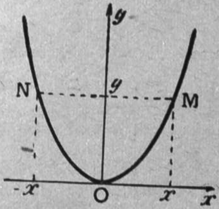
1. Coi hàm-số $y = f(x) = x^2$

Khi $x = -5$ thì $y = f(5) = 25$

Khi $x = 5$ thì $y = f(-5) = 25$

Như thế, khi x đổi thành $-x$ thì y không thay đổi nghĩa là

$$f(5) = f(-5)$$



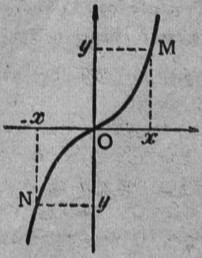
Hình 15

Nói chung, nếu một hàm-số $y = f(x)$ thỏa cho điều-kiện

$$f(x) = f(-x)$$

thì ta nói rằng nó là *một hàm-số chẵn.*

Hai điểm M (x, y) và N $(-x, y)$ đều nằm trên đường biểu-diễn của hàm-số. Vậy đường biểu-diễn đó có một *trục đối-xứng,* đó là trục Oy.



Hình 16

2. Coi hàm-số $y = f(x) = x^3$.

Khi $x = -2$ thì $y = f(-2) = -8$

Khi $x = 2$ thì $y = f(2) = 8$.

Như thế, khi x đổi thành $-x$ thì y đổi thành $-y$, nghĩa là :

$$f(2) = -f(-2)$$

Nói chung, nếu một hàm-số $y = f(x)$ thỏa cho điều-kiện

$$f(x) = -f(-x)$$

thì ta nói rằng nó là một *hàm-số lẻ.*

Hai điểm M (x, y) và N $(-x, -y)$ đều nằm trong đường biểu-diễn của hàm-số. Vậy đường biểu-diễn đó có một *tâm đối-xứng,* đó là gốc tọa-độ O.

BÀI TẬP

6. 1. *Thế nào là biến-số ? Thế nào là hàm-số ? Cho vài thí-dụ.*

6. 2. *Tìm một thí-dụ về hàm-số phụ-thuộc vào hai biến-số.*

6. 3. *Thế nào là một khoảng ? Thế nào là một hàm-số xác-định trong một khoảng ? Tìm một thí-dụ về hàm-số không xác-định tại một trị-số của biến-số. Tìm một hàm-số không được xác-định trong khoảng (2 ; 5).*

6. 4. *Thế nào là một hàm-số đồng-biến, nghịch-biến ?*

Khi nào thì một hàm-số đồng-biến, nghịch-biến ?

6. 5. *Thế nào là một hàm-số chẵn ? Đường biểu-diễn của một hàm-số chẵn có tính-chất gì ?*

Thế nào là một hàm-số lẻ ? Đường biểu-diễn của một hàm-số lẻ có tính-chất gì ?

6. 6. *Coi hàm-số* $y = x^2 + 6x + 7.$

Đem gốc tọa-độ đến điểm I $(-3, -2)$ *bằng phép tịnh-tiến* $\overrightarrow{OI}$, *hàm-số hóa ra sao ? Hàm-số mới có phải là hàm-số chẵn không ?*

Nó có tính-chất gì về phương-diện hình-học ?

6. 7. *Coi hàm-số* $y = \dfrac{3x + 1}{x - 2}$

Đem gốc tọa-độ đến điểm I $(2 ; 3)$ *bằng phép tịnh-tiến* $\overrightarrow{OI}$, *hàm-số hóa ra sao ? Hàm-số mới có phải là hàm-số lẻ không ?*

Nó có tính-chất gì về phương-diện hình-học ?

7. ĐẠO-HÀM

1. ĐỊNH-NGHĨA

7. 1. TRỊ-SỐ THỰC CỦA MỘT PHÂN-SỐ.

Xét phân-số $P = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Khi $x = 1$ thì tử-số và mẫu-số cùng triệt-tiêu : P có dạng $\dfrac{0}{0}$

Vậy P *vô-định* khi $x = 1$

Ta có thể viết $P = \dfrac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1}$

Khi x tiến tới 1 mà không bằng 1 thì $x - 1 \neq 0$ và ta có thể đơn-giản cho $x - 1$. Như thế là P tiến tới $x + 1 = 2$.

Số 2 đó gọi là *giới-hạn* của P khi $x \rightarrow 1$, hay *trị-số thực* của P khi $x = 1$.

Ta nói : — Giới-hạn của P là 2 khi x tiến tới 1.

— P tiến tới 2 khi x tiến tới 1

— Trị-số thực của P là 2 khi $x = 1$.

Xem thế, trong một phân-số, *khi tử-số và mẫu-số cùng tiến tới 0. chưa chắc phân-số đã vô-định*, rất có thể là phân-số tiến tới một giới-hạn. Giới-hạn đó gọi là *trị-số thực* của phân-số.

7. 2. GIA-SỐ.

Giả-sử x có trị-số 4, rồi có trị-số 7.

Ta nói : gia-số của x là $7 - 4 = 3$.

Nếu lúc đầu $x = 5$, lúc sau $x = 3$, thì gia-số của x là $3 - 5 = -2$.

Nói chung, khi x đi từ trị-số x_0 đến trị-số x_1 thì gia-số của nó là $x_1 - x_0$.

Gia-số = trị-số cuối — trị-số đầu.

Người ta thường chỉ gia-số của x là Δx hay h.

$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}$

Khi y đi từ trị-số y_0 đến trị-số y_1 thì gia-số là $y_1 - y_0$. Người ta thường chỉ gia-số của y là Δy hay k.

$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0$	$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + \Delta \mathbf{y}$

7. 3. ĐỊNH-NGHĨA ĐẠO-HÀM.

Coi một hàm-số $y = f(x)$, xác-định và liên-tục trong một khoảng (a, b).

Khi x có một gia-số là Δx, thì y có gia-số tương-ứng là Δy.

Nếu tỉ-số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ có một giới-hạn khi Δx tiến tới 0 thì giới-hạn đó gọi là *đạo-hàm của hàm-số* $y = f(x)$.

$$\boxed{\text{Đạo-hàm của một hàm-số là giới-hạn, nếu có, của tỉ-số } \frac{\Delta Y}{\Delta X} \text{ khi } \Delta X \to 0}$$

7. 4. KÝ-HIỆU.

Đạo-hàm của hàm-số $y = f(x)$ ký-hiệu bằng cách sau đây :

$$y' = f'(x)$$

$$\boxed{\mathbf{f'(x) = y' = \text{giới-hạn}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}} \quad \mathbf{\Delta x \to 0}}$$

7. 5. PHƯƠNG-PHÁP TÍNH ĐẠO-HÀM.

Muốn tính đạo-hàm của một hàm-số $y = f(x)$ thì ta làm những việc sau này :

1. Cho x một trị-số x_0 ở trong khoảng mà hàm-số được xác-định ; cho x một gia-số Δx, rồi tính gia-số tương-ứng của y là Δy.

2. Lập tỉ-số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. Cho Δx tiến tới 0, xét xem tỉ-số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiến tới giới-hạn nào. Giới-hạn đó, nếu có, là *đạo-hàm của hàm-số tại trị-số* x_0 mà ta đã nói ở trên.

7. 6. THÍ-DỤ.

1. Tính đạo-hàm của hàm-số $y = 3x^2$

Khi $x = x_0$ thì $y = y_0 = 3x_0^2$

$x = x_1$ $\quad y = y_1 = 3x_1^2$

Ta có $\Delta x = x_1 - x_0 \quad (\Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x)$

và
$$\begin{aligned}\Delta y = y_1 - y_0 &= 3(x_1^2 - x_0^2) \\ &= 3(x_1 + x_0)(x_1 - x_0) \\ &= 3(x_0 + \Delta x + x_0) \,.\, \Delta x\end{aligned}$$

Suy ra $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3(\Delta x + 2x_0)$

Khi $\Delta x \rightarrow 0$ thì giới-hạn của tỉ-số $\Delta y/\Delta x$ là $6x_0$. Vậy :

Đạo-hàm của hàm-số $y = 3x^2$ tại trị-số x_0 là $y' = 6x_0$.

x_0 là một trị-số bất-kỳ do ta chọn, ta có thể bỏ chỉ-số đi và viết $y' = 6x$.

Ta nói : đạo-hàm của hàm-số $y = 3x^2$ là $y' = 6x$.

Cần chú-ý rằng :

* $6x$ là *đạo-hàm* của hàm-số, đạo-hàm này phụ-thuộc vào x, thay đổi theo x. Nói kỹ hơn, $6x$ là *hàm-số đạo-hàm* của $3x^2$.

* $6x_0$ là đạo-hàm của hàm-số *tại trị-số* $x = x_0$. Nó là *một số* (x được thay thế bằng trị-số x_0). Vì lẽ đó, người ta nói : $6x_0$ là *trị-số của đạo-hàm* khi $x = x_0$, hay ngắn hơn : $6x_0$ là *đạo-số* khi $x = x_0$.

2. **Tính đạo-hàm của hàm-số** $y = \dfrac{2}{x}$

Ta giả-sử $x \neq 0$.

Khi $x = x_0$ thì $y = y_0 = \dfrac{2}{x_0}$

$x = x_1 \quad y = y_1 = \dfrac{2}{x_1}$

Ta có $\Delta x = x_1 - x_0$ ($\Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$).

và $$\Delta y = y_1 - y_0 = \frac{2}{x_1} - \frac{2}{x_0}$$

$$= \frac{2\,(x_0 - x_1)}{x_1 \cdot x_0} = \frac{2\,(-\Delta x)}{(x_0 + \Delta x)x_0}$$

Suy ra $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{(x_0 + \Delta x)\,x_0}$$

Khi $\Delta x \to 0$ thì giới-hạn của tỉ-số

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} \quad \text{là} \quad \frac{-2}{x_0^2}$$

Vậy : *trị số của đạo-hàm* khi $x = x_0$ là $y' = \frac{2}{x_0^2}$.

Đạo-hàm là $y' = \frac{-2}{x^2}$

Trị-số của đạo-hàm khi $x = 5$ là $y' = \frac{-2}{25}$

Trị-số của đạo-hàm khi $x = -1$ là $y' = -2$

2. NGHĨA HÌNH-HỌC CỦA ĐẠO-HÀM.

7. 7. ĐỘ DỐC CỦA MỘT ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA HAI ĐIỂM.

1. Phương-trình của một đường thẳng là :

$$y = ax + b$$

Nếu đường thẳng đi qua gốc thì phương-trình của đường thẳng là :

$$y = ax$$

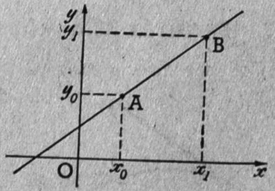
a gọi là *độ dốc* hay *hệ-số góc* của đường thẳng.

2. Coi hai điểm A (x_0, y_0) và B $(x_1\ y_1)$.

Ta hãy tính độ dốc của đường thẳng AB.

Phương-trình của đường thẳng AB là :

$$y = ax + b \qquad (1)$$



Hình 17

A và B là hai điểm của đường thẳng, vậy tọa-độ của A và B nghiệm đúng phương-trình (1). Thay *x* và *y* bằng tọa-độ của A và B, ta có :

$$y_0 = ax_0 + b \qquad y_1 = ax_1 + b$$

Trừ vế, ta được

$$y_1 - y_0 = ax_1 - ax_0 = a\,(x_1 - x_0)$$

Do đó : $$\boxed{\mathbf{a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}}$$

Đặt $y_1 - y_0 = \Delta y$ và $x_1 - x_0 = \Delta x$, ta có

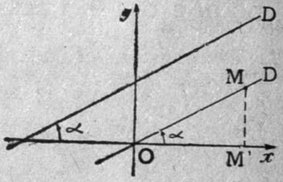
$$\boxed{\mathbf{a = \frac{\Delta y}{\Delta x}}}$$

3. Coi đường thẳng D đi qua gốc O mà phương-trình là $y = ax$. Lấy một điểm M trên đường đó, tọa-độ của M là x, y.

Ta có $y = ax$

hay $a = \frac{y}{x} = \frac{\overline{M'M}}{\overline{OM'}} = \text{tg}\,\alpha$

$$\boxed{\mathbf{a = tg\,\alpha}}$$

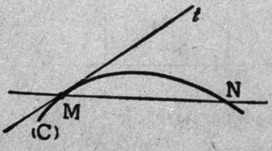


Hình 18

Vậy : **Độ dốc của một đường thẳng bằng tang của góc hợp bởi trục x và đường thẳng đó.**

7. 8. TIẾP-TUYẾN CỦA MỘT ĐƯỜNG CONG TẠI MỘT ĐIỂM.

Coi một đường cong (C) trên đó có một điểm cố-định M và một điểm lưu-động N.



Hình 19

MN gọi là một *cát-tuyến* của (C).

Cho N tiến tới M.

Cát-tuyến MN tiến tới một vị-trí giới-hạn M*t*.

M*t* gọi là *tiếp-tuyến* của (C) tại M.

7. 9. NGHĨA HÌNH-HỌC CỦA ĐẠO-HÀM.

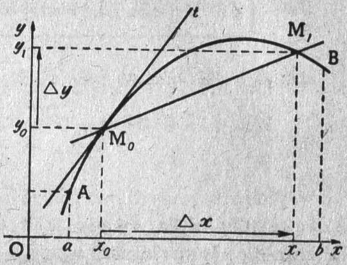
Xét một hàm-số $y = f(x)$ xác-định và liên-tục trong khoảng (a, b).

Đường biểu-diễn (C) của hàm-số giới-hạn ở hai điểm A $[a, f(a)]$ và B $[b, f(b)]$.

ĐỊNH-LÝ :

Đạo - hàm của hàm - số $y = f(x)$ khi $x = x_0$, bằng độ dốc của tiếp - tuyến của đường biểu-diễn tại điểm M_0 mà hoành-độ là x_0.

Trong khoảng (a, b), ta hãy lấy một trị-số x_0 và chú-ý đến điểm M_0 trên đường cong, hoành-độ là x_0.



Hình 20

Xét một trị-số x_1 của x : $x_1 = x_0 + \Delta x$.

Trị-số tương-ứng của y là

$$y_0 = f(x_0) \quad \text{và}$$

$$y_1 = f(x_1)$$

Gọi M_1 là điểm mà tọa-độ là x_1, y_1 Độ dốc của đường thẳng $M_0 M_1$ là

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Khi $\Delta x \rightarrow 0$ thì $\Delta y \rightarrow 0$.

Như thế x_1 tiến tới x_0 ; y_1 tiến tới y_0 ; tức là M_1 tiến tới M_0.

1. Tỉ-số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ tiến tới đạo-hàm y'_0 của hàm-số, ứng với trị-số x_0.

2. Cát-tuyến của M_0M_1 tiến tới vị-trí tiếp-tuyến M_0t của đường cong tại M.

Độ dốc của M_0M_1 là $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, tới giới-hạn thì độ dốc của M_0t là y'_0.

Vậy $\boxed{\textbf{độ dốc của } \mathbf{M_0t = } \textbf{ trị-số của đạo-hàm khi } \mathbf{x = x_0}}$

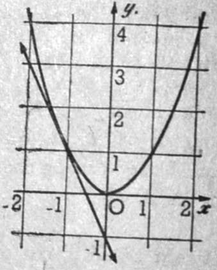
Thí-dụ : Xét hàm-số $y = x^2$. Đạo-hàm là $y' = 2x$.

1. Khi $x = 0$ thì $y = 0$ và $y' = 0$.

Vậy đường cong đi qua gốc và độ dốc của tiếp-tuyến tại gốc là 0. Nói khác đi, tiếp-tuyến nằm ngang.

2. Khi $x = -1$ thì $y = 1$ và $y' = -2$.

Vậy đường cong đi qua điểm A $(-1\ ;\ 1)$ và độ dốc của tiếp-tuyến kẻ từ A là -2.

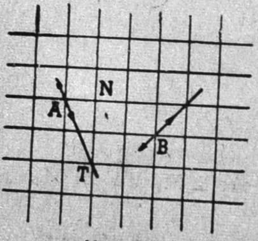


Hình 21

7. 10. CÁCH VẼ TIẾP-TUYẾN.

Ta hãy giải-quyết vấn-đề sau đây :

Coi một đường cong (C), lấy một điểm A trên đó ; biết độ dốc của tiếp-tuyến với đường cong tại A là -2. Làm thế nào vẽ được tiếp-tuyến đó ?



Hình 22

Ta làm như sau đây :

Vẽ vectơ $\overrightarrow{AN}$ theo phương Ox, độ dài đại-số là $+1$. Vẽ vectơ $\overrightarrow{NT}$ theo phương Oy, độ dài đại-số là -2.

Nối AT. AT chính là tiếp-tuyến mà ta đang muốn vẽ ; thật vậy, ta có :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{NT}}{\overline{AN}} = \frac{-2}{1} = -2.$$

Vậy thì độ dốc của AT là — 2. AT đúng là tiếp-tuyến của đường cong tại A.

Trong hình vẽ, ta đã kẻ thêm một tiếp-tuyến tại điểm B biết rằng độ dốc của tiếp-tuyến tại B là 1.

Việc vẽ tiếp-tuyến cho đường cong quan-trọng ở điểm này : nếu ta có được nhiều tiếp-tuyến, thì ta vẽ đường cong được đúng.

BÀI TẬP

- **Tìm trị-số thực của những phân-số sau đây :**

7. 1. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ *khi* $x = 2$ — 4

7. 2. $y = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ *khi* $x = 1$ 3

7. 3. $y = \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 - 3x + 2}$ *khi* $x = 1$ —1

7. 4. $y = \dfrac{x^2 + 5x - 6}{x + 2}$ *khi* $x = -2$

- **Hãy xét xem y ra sao khi x ⟶ ∞ :**

7. 5. $y = 3x^2 - 5x - 1$ *(đặt x^2 làm thừa-số chung)*

7. 6. $y = -x^2 + 4x - 5$ *(đặt x^2 làm thừa-số chung)*

7. 7. $y = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$ *(đặt x làm thừa-số chung ở trên và ở dưới)*

7. 8. $y = \dfrac{x + 5}{4x - 1}$ *(như trên)*

- **Tính trực-tiếp đạo-hàm của những hàm-số sau này :**

7. 11. $y = x^2 + 2$

7. 12. $y = -x^2$

7. 13. $y = x^2 - 3x$

7. 14. $y = -2x^2 + 5x$

7. 15. $y = x^2 - 5x + 1$

7. 16. $y = 3x^2 - 6x + 5$

7. 17. $y = \frac{3}{x} + 1$

7. 18. $y = -\frac{1}{x}$

7. 19. $y = \frac{2x + 3}{x}$

7. 20. $y = \frac{3}{x + 2}$

7. 21. $y = \frac{x + 1}{x - 1}$

7. 22. $y = \frac{5 - x}{x + 1}$

8. PHÉP TÍNH ĐẠO-HÀM

8. 1. ĐẠO-HÀM CỦA MỘT HẰNG-SỐ.

Coi một hàm-số y rút lại hằng-số c : $y = c$.

Dù x_0 và x_1 là bao nhiêu chăng nữa, y vẫn không thay đổi, nghĩa là $\Delta y = 0$.

Do đó $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

Vậy *đạo-hàm của hằng-số là số không.* $\boxed{\mathbf{y = c} \;\big|\; \mathbf{y' = 0}}$ (1)

8. 2. ĐẠO-HÀM CỦA BIẾN-SỐ.

Coi hàm-số $y = x$

Khi cho $x = x_0$ thì $y_0 = x_0$

Khi cho $x = x_1$ thì $y_1 = x_1$

Trừ vế, ta có :

$$y_1 - y_0 = x_1 - x_0. \quad \text{Vậy } \Delta y = \Delta x.$$

Suy ra : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$. Cho $\Delta x \rightarrow 0$ giới-hạn của tỉ-số vẫn là 1.

Vậy *đạo-hàm của* $y = x$ *là* $y' = 1$ $\boxed{\mathbf{y = x} \;\big|\; \mathbf{y' = 1}}$ (2)

Ta nói *đạo-hàm của biến-số* x *là 1.*

8. 3. ĐẠO-HÀM CỦA MỘT TỔNG-SỐ

Có hàm-số $y = u + v$ trong đó u và v là hai hàm-số (cùng được xác-định) của x. Giả-sử u và v đều có đạo-hàm cả.

Khi $x = x_0$ thì $y_0 = u_0 + v_0$

Khi $x = x_1$ thì $y_1 = u_1 + v_1$

Trừ vế ta có :

$$y_1 - y_0 = (u_1 - u_0) + (v_1 - v_0)$$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$

Chia cả hai vế cho Δx thì được :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Khi $\Delta x \to 0$ nghĩa là $x_1 \to x_0$ thì giới-hạn của $\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta u}{\Delta x}, \frac{\Delta v}{\Delta x}$ lần-lượt là y'_0, u'_0, v'_0.

Vậy

$$y'_0 = u'_0 + v'_0$$

Đó là *trị-số* của đạo-hàm khi $x = x_0$. Nếu không nói rõ trị-số x_0 thì ta bỏ chỉ-số, và viết

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \quad \mathbf{y}' = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'} \qquad (3)$$

Trên đây ta nói đến một tổng-số gồm hai số-hạng, nếu ta chú-ý đến một tổng-số gồm ba số-hạng như $y = u + v + w$ thì ta viết thành hai số-hạng rồi áp-dụng công-thức trên :

$$y = u + v + w$$

$$y = (u + v) + w \quad \text{(hai số-hạng)}$$

$$y' = (u + v)' + w'$$

$$y' = u' + v' + w'$$

Nếu gặp nhiều số-hạng hơn, ta vẫn theo cách đó.

$\mathbf{y = u + v + w}$	$\mathbf{y' = u' + v' + w'}$

(4)

8. 4. ĐẠO-HÀM CỦA MỘT TÍCH-SỐ.

a) **Trường-hợp tích-số có hai thừa-số.**

Có hàm-số $y = u \cdot v$ trong đó u và v là hai hàm-số (cùng được xác-định) của x. Giả-sử u và v đều có đạo-hàm.

Khi $x = x_0$ thì $y_0 = u_0 \cdot v_0$

Khi $x = x_1$ thì $y_1 = u_1 \cdot v_1$

Trừ vế, ta có :

$$y_1 - y_0 = u_1v_1 - u_0v_0$$

Nhưng $$u_1 = u_0 + \Delta u$$

$$v_1 = v_0 + \Delta v$$

Nên $$y_1 - y_0 = (u_0 + \Delta u)(v_0 + \Delta v) - u_0 v_0$$

và $$\Delta y = y_1 - y_0 = v_0 \cdot \Delta u + u_0 \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v$$

Chia cả cho Δx :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v_0 \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u_0 \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v$$

Khi $\Delta x \rightarrow 0$ nghĩa là x_1 tiến tới x_0 thì giới-hạn của $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ là y'_0 : u'_0, v'_0 theo thứ-tự.

Giới-hạn của $\frac{\Delta u}{\Delta x} \times \Delta v$ là 0 (bởi vì $\Delta v \rightarrow 0$ cùng một lúc với Δx)

Vậy đạo-hàm của hàm-số $y = u \cdot v$ tại trị-số $x = x_0$ là

$$y'_0 = u'_0v_0 + u_0v'_0$$

Đó là *trị-số* của đạo-hàm khi $x = x_0$.

Nếu ta không kể rõ trị-số x_0 thì ta bỏ chỉ-số và viết

$\mathbf{y = u \cdot v}$	$\mathbf{y' = u' \cdot v + u \cdot v'}$	(5)

b) **Trường-hợp tích-số có nhiều thừa-số.**

Coi hàm-số $y = u \cdot v \cdot w$ trong đó u, v, w là những hàm-số của x. Ta hãy tính đạo-hàm của y. Ta viết $y = (u \cdot v) \cdot w$ rồi áp-dụng công-thức trên

$$y' = (u \cdot v)' \cdot w + (u \cdot v) \cdot w'$$
$$= (u' \cdot v + u \cdot v') \cdot w + (u \cdot v)\, w'$$

Tóm lại, ta có :

$\mathbf{y = u \cdot v \cdot w}$	$\mathbf{y' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'}$	(6)

c) **Trường-hợp riêng : một thừa-số là hằng-số.**

Đạo-hàm của $\mathbf{y = a \cdot u}$, trong đó a là hằng-số.

Áp-dụng công-thức để tính đạo-hàm của một tích-số gồm hai thừa-số và nhận-xét rằng đạo-hàm của một hằng-số là 0 thì ta thấy :

$$y' = a'\,u + a\,u'$$

a là hằng-số nên $a' = 0$, và $y' = au'$

$\mathbf{y = a \cdot u}$	$\mathbf{y' = a \cdot u'}$	(7)

Trường-hợp riêng.

$\mathbf{y = ax}$	$\mathbf{y' = a}$	(8)

8. 5. ĐẠO-HÀM CỦA MỘT LŨY-THỪA.

Coi hàm-số $y = u^m$ trong đó u là hàm-số của x, m là một số nguyên dương ($\geqslant 2$). Giả-sử u có đạo-hàm. Ta viết :

$$y = u^m = u\,.\,u\,\underbrace{.\,v\,.\,.\,.\,.\,.\,u\,.\,u}_{m\ \text{thừa-số}}$$

Như thế, ta có một tích-số gồm nhiều thừa-số. Vậy ta có thể lấy đạo-hàm được.

$$y' = u'\,.\,\underbrace{u^{m-1} + \ldots. + u'\,.\,u^{m-1}}_{m\ \text{số hạng}} = m\,u'\,.\,u^{m-1}$$

Do đó, ta có công-thức :

$$\boxed{\mathbf{y = u^m}} \boxed{\mathbf{y' = m\,.\,u^{m-1}\,.\,u'}} \qquad (9)$$

$$\boxed{\mathbf{y = x^m}} \boxed{\mathbf{y' = mx^{m-1}}}$$

8. 6. ĐẠO-HÀM CỦA MỘT THƯƠNG-SỐ.

Coi hàm-số $y = \dfrac{u}{v}$ trong đó u và v là hai hàm-số cùng được xác-định của x. Giả-sử chúng có đạo-hàm, và v khác 0.

Khi $x = x_0$ thì $y_0 = \dfrac{u_0}{v_0}$

Khi $x = x_1$ thì $y_1 = \dfrac{u_1}{v_1} = \dfrac{u_0 + \Delta u}{v_0 + \Delta v}$

Trừ vế thì có

$$y_1 - y_0 = \frac{u_1}{v_1} - \frac{u_0}{v_0} = \frac{u_0 + \Delta u}{v_0 + \Delta v} - \frac{u_0}{v_0}$$

Lấy mẫu-số chung là $v_0\,(v_0 + \Delta v)$, ta được

$$\Delta y = \frac{v_0 \,.\, \Delta u - u_0 \,.\, \Delta v}{v_0\,(v_0 + \Delta v)}$$

Chia hai vế cho Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v_0 \,.\, \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u_0 \,.\, \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v_0\,(v_0 + \Delta v)}$$

Khi $\Delta x \rightarrow 0$ nghĩa là x_1 tiến tới x_0 thì giới-hạn của $\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta u}{\Delta x}, \frac{\Delta v}{\Delta x}$ lần-lượt là y'_0, u'_0, x'_0.

Vậy ta có $$y'_0 = \frac{v_0 \,.\, u'_0 - u_0 \,.\, v'_0}{v_0^2}$$

Đó là *trị-số* của đạo-hàm khi $x = x_0$.

Nếu không nói rõ trị-số của x_0 thì có thể bỏ chỉ-số, và ta có công-thức :

$$\boxed{\mathbf{y} = \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}} \quad \Bigg| \quad \mathbf{y}' = \frac{\mathbf{vu}' - \mathbf{uv}'}{\mathbf{v}^2}} \qquad (10)$$

Chú-ý : Trên đây là cách tính trực-tiếp. Ta có thể viết $u = yv$. Đó là một *tích-số*.

Đạo-hàm là $$u' = y'v + yv'$$

$$u' = y'v + \frac{u}{v}\,v'$$

Từ đó, ta tìm ra : $$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Trường-hợp riêng.

1. **Đạo-hàm của hàm-số $y = \frac{1}{v}$ $(v \neq 0)$.**

Áp-dụng công-thức (10) thì được

$$\boxed{y = \frac{1}{v} \quad \Big| \quad y' = \frac{-v'}{v^2}} \qquad (11)$$

2. **Đạo-hàm của $y = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.**

Lại áp-dụng công-thức (11) vừa tìm thấy thì được

$$\boxed{y = \frac{1}{x} \quad \Big| \quad y' = -\frac{1}{x^2}} \qquad (12)$$

3. **Đạo-hàm của $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $\left(x \neq -\frac{d}{c}\right)$**

Áp-dụng công-thức về đạo-hàm của một thương-số thì có :

$$\boxed{y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \Big| \quad y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}} \qquad (13)$$

8. 7. ĐẠO-HÀM CỦA MỘT CĂN-THỨC BẬC HAI.

Có hàm-số $y = \sqrt{u}$ trong đó u là một hàm-số của x, giả-sử u dương và có đạo-hàm đối với x.

Khi $x = x_0$ thì $y_0 = \sqrt{u_0}$

Khi $x = x_1$ thì $y_1 = \sqrt{u_1} = \sqrt{u_0 + \Delta u}$

Trừ vế, ta có

$$y_1 - y_0 = \sqrt{u_1} - \sqrt{u_0} = \sqrt{u_0 + \Delta u} - \sqrt{u_0}$$

Nhân và chia với lượng liên-hiệp của vế thứ nhì

$$\Delta u = \frac{(\sqrt{u_0 + \Delta u} - \sqrt{u_0})\,(\sqrt{u_0 + \Delta u} + \sqrt{u_0})}{\sqrt{u_0 + \Delta u} + \sqrt{u_0}}$$

$$= \frac{(u_0 + \Delta u) - u_0}{\sqrt{u_0 + \Delta u} + \sqrt{u_0}} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u_0 \,.\, \Delta u} + \sqrt{u^0}}$$

Chia cho Δx thì có

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{u_0 + \Delta u} + \sqrt{u0}} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Khi $\Delta x \rightarrow 0$, nghĩa là x_1 tiến tới x_0 thì giới-hạn của $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ là y'_0 , u'_0 theo thứ-tự.

Vậy *trị-số* đạo-hàm của $y = \sqrt{u}$, khi $x = x_0$, là $y'_0 = \dfrac{u'_0}{2\sqrt{u_0}}$

Khi không nói rõ x_0 thì ta có công-thức

$$\boxed{\mathbf{y} = \sqrt{\mathbf{u}} \quad\Big|\quad \mathbf{y}' = \frac{\mathbf{u}'}{2\sqrt{\mathbf{u}}}} \qquad (14)$$

Chú-ý : Nếu viết $y^2 = u$ thì ta có $2yy' = u'$, $y = \dfrac{u'}{2y}$; $y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Trường-hợp riêng : Đạo-hàm của $y = \sqrt{x}$

Áp-dụng công-thức (14) thì được $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\boxed{\mathbf{y} = \sqrt{\mathbf{x}} \quad\Big|\quad \mathbf{y}' = \frac{\mathbf{1}}{2\sqrt{\mathbf{x}}}} \qquad (15)$$

8. 8. TÓM TẮT.

Hàm số	Đạo hàm
$y = c$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = u + v + w$	$y' = u' + v' + w'$
$y = u \cdot v$	$y' = u'v + uv'$
$y = au$	$y' = au'$
$y = u^m$	$y' = m \cdot u^{m-1} u'$
$y = x^m$	$y' = m \cdot x^{m-1}$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$
$y = \frac{1}{v}$	$y' = \frac{-v'}{v^2}$ $(v \neq 0)$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$
$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(u > 0)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$
$y = ax^2 + bx + c$	$y' = 2ax + b$
$y = \frac{ax + b}{cx + d}$	$y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ $\left(x \neq -\frac{d}{c}\right)$

8. 9. ÁP-DỤNG VÀO VÀI THÍ-DỤ.

Hàm-số	**Dạng-thức**	**Công-thức**	**Đạo-hàm**
$y = 5$	$y = c$	$y' = 0$	$y' = 0$
$y = 3x$	$y = ax$	$y' = a$	$y' = 3$
$y = x^5$	$y = x^m$ $m = 5$	$y' = mx^{m-1}$	$y' = 5x^4$
$y = 2x^3$	$y = ax^m$	$y' = a \,.\, mx^{m-4}$	$y' = 6x^3$
$y = (x + 1)(x^2 - 3)$	$y = u \cdot v$ $u = x + 1$ $v = x^2 - 3$	$y = u'v + uv'$	$y' = 1(x^2 - 3) + (x + 1)\,2x$ $= 3x^2 + 2x - 3$
$y = (3x^2 - 1)^2$	$y = u^m$ $u = 3x^2 - 1$ $m = 2$	$y' = mu^{m-1}\,u'$	$y' = 2\,(3x^2 - 1)\,6x$ $= 12x\,(3x^2 - 1)$
$y = \dfrac{x^2 - 2}{3x + 1}$ $x \neq -\dfrac{1}{3}$	$y = \dfrac{u}{v}$ $u = x^2 - 2$ $v = 3x + 1$	$y' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$	$y' = \dfrac{(3x + 1)\,2x - (x^2 - 2)\,3}{(3x + 1)^2}$ $= \dfrac{3x^2 + 2x + 6}{(3x + 1)^2}$
$y = \sqrt{1 - 2x}$ $x < \dfrac{1}{2}$	$y = \sqrt{u}$ $u = 1 - 2x$	$y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y' = \dfrac{-2}{2\sqrt{1 - 2x}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - 2x}}$
$y = 5 + 2x - \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ $x > 0$			$y' = 0 + 2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2}$

8. 10. HÀM-SỐ THEO HÀM-SỐ.

Giả-sử y là hàm-số của u và u lại là hàm-số của x.

$$y = f(u) \qquad u = g(x)$$

Ta nói rằng : *y là một hàm-số theo hàm-số của x.*

Thí-dụ : $\quad y = \sqrt{x^2 + 2x}$

Ta viết $\quad y = \sqrt{u} \ , \ u = x^2 + 2x$

Như thế y là hàm-số của x, qua sự trung-gian của u.

Muốn tính đạo-hàm của y đối với x, ta lấy đạo-hàm của y đối với u nhân với đạo-hàm của u đối với x.

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_x}$$

Thí-dụ : Tính đạo-hàm của hàm-số $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

Ta viết $\quad y = \sqrt{u}$ với $u = x^2 + 2x$

$$y'_u = \frac{1}{2\sqrt{u}} \ ; \quad u'_x = 2x + 2$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x + 2) = \frac{x + 1}{\sqrt{u}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$$

BÀI TẬP

- **Dùng công-thức để tính đạo-hàm của các hàm-số sau đây :**

8. 1. $y = 3x^2 - 5x + 1$ **8. 2.** $y = -x^2 + 3x - 5$

8. 3. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$ **8. 4.** $y = -\frac{x^2}{3} + 2x - 1$

8. 5. $y = \dfrac{x + 2}{3x - 1}$

8. 6. $y = \dfrac{x}{3x + 2}$

8. 7. $y = \dfrac{1}{x - 3}$

8. 8. $y = \dfrac{-5}{2 - x}$

8. 9. $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$

8. 10. $y = \dfrac{x - 5}{3 + x}$

8 11. $y = (x + 3)(2x + 1)$

8. 12. $y = (x - 1)(x + 2)(2x - 3)$

8. 13. $y = (x^2 + 3)(x - 3)$

8. 14. $y = (x^2 - 3x)(x + 1)$

8. 15. $y = \dfrac{2x^2 + 1}{3x + 2}$

8. 16. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 3}$

8. 17. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{2x - 1}$

8. 18. $y = \dfrac{(x - 3)^2}{x^2 + 2x - 5}$

8. 19. $y = \dfrac{1}{(x - 2)^2}$

8. 20. $y = \dfrac{-3}{(2x + 1)^2}$

8. 21. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$

8. 22. $y = x^4 - 3x^3 + 5x^2 + x - 1$

8. 23. $x = (3x - 1)^2$

8. 24. $y = (x - 5)^3$

8. 25. $y = \left(\dfrac{x}{x + 1}\right)^2$

8. 26. $y = (x^2 + 2x + 1)^2$

8. 27. $y = \sqrt{x^2 + 1}$

8. 28. $y = \sqrt{2x - 3}$

8. 29. $y = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$

8. 30. $y = \sqrt{4x^2 - 3x - 1}$

Tính trực tiếp đao hàm ω hàm số sau đây:

(81) $y = x^2$

(82) $y = ax^2 + bx + c$

(83) $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

9. CÔNG-DỤNG CỦA ĐẠO-HÀM

9. 1. NHẮC LẠI.

Trong một bài trước, ta đã biết rằng : *trị-số của đạo-hàm tại điểm* $x = x_0$ *thì bằng độ dốc của tiếp-tuyến tại điểm đó.* Công-dụng thứ nhất của đạo-hàm là như vậy.

9. 2. THÍ-DỤ.

1. **Gọi (C) là đường biểu-diễn của hàm-số** $y = x^2 - 2x - 3$**. Tìm phương-trình của tiếp-tuyến tại điểm A nằm trên (C) biết rằng** $x_A = 2$**.**

$$y = x^2 - 2x - 3 \quad \Rightarrow \quad y' = 2x - 2 = 2(x - 1)$$

Khi $x = 2$ thì $y = -3$ và $y' = 2$.

Vậy tại điểm $A\,(x = 2\,;\, y = -3)$, độ dốc của tiếp-tuyến là $+2$.

Phương-trình của tiếp-tuyến tại A là

$$y - y_A = y'_A\,(x - x_A)$$

$$y + 3 = 2\,(x - 2)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{y = 2x - 7}$$

2. **Gọi (H) là đường biểu-diễn của hàm-số** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$**. Tìm phương-trình của tiếp-tuyến tại điểm A nằm trên (H) biế rằng** $x_A = 2$**.**

$$y = \frac{x+1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-2}{(x-1)^2} \quad (x \neq 1)$$

Khi $x = 2$ thì $y = 3$ và $y' = -2$.

Vậy tại điểm A $(x = 2\ ;\ y = 3)$, độ dốc của tiếp-tuyến là -2.

Phương-trình của tiếp-tuyến tại A là

$$y - y_A = y'_A\,(x - x_A)$$

$$y - 3 = -2\,(x - 2)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{y = -2x + 7}$$

9. 3. CÔNG-DỤNG KHÁC.

Đạo-hàm còn một công-dụng lớn hơn nữa, liên-quan đến *chiều biến-thiên* của hàm-số. Trước khi vào trường-hợp chung, ta nhắc lại một trường-hợp riêng.

Ta đã biết rằng : Nếu một hàm-số rút lại là một hằng-số thì đạo-hàm của nó là zêrô $(y = c, y' = 0)$.

Chúng ta *công-nhận* định-lý đảo : *Nếu đạo-hàm của hàm-số luôn luôn bằng zêrô trong khoảng (a, b) thì trong khoảng đó, hàm-số rút lại là một hằng-số.*

9. 4. ĐỊNH-LÝ.

Coi một hàm-số $y = f(x)$ xác-định và có đạo-hàm trong khoảng (a, b) ; giả-sử rằng đạo-hàm $f'(x)$ không triệt-tiêu lần nào trong khoảng đó.

1. **Nếu $f(x)$ đồng-biến thì $f'(x)$ dương.**
2. **Nếu $f(x)$ nghịch-biến thì $f'(x)$ âm.**

Gọi x_0 và $x_0 + \Delta x$ là hai trị-số của x ở trong khoảng (a, b).

1. Nếu $f(x)$ là một hàm-số đồng-biến thì, theo định-nghĩa, ta có

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$$

Khi cho Δx tiến tới 0 thì vế thứ nhất tiến tới một giới-hạn, vế thứ nhất là số dương nên giới-hạn đó là số dương hay 0.

Vậy đạo-hàm là số dương hay 0 ; ta đã gạt trường-hợp đạo-hàm bằng 0 trong giả-thiết rồi ; nên đạo-hàm là số dương.

2. Nếu $f(x)$ là hàm-số nghịch-biến thì, theo định-nghĩa, ta có

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$$

Khi cho Δx tiến tới 0 thì vế thứ nhất tiến tới một giới-hạn, vế thứ nhất là số âm nên giới-hạn đó là số âm hay 0.

Vậy đạo-hàm là số âm hay 0, ta đã gạt trường-hợp đạo-hàm bằng 0 trong giả-thiết rồi ; nên đạo-hàm là số âm.

TÓM-TẮT :

f (x) là hằng-số $\Rightarrow y' = 0$
f (x) đồng-biến $\Rightarrow y' > 0$
f (x) nghịch-biến $\Rightarrow y' < 0$

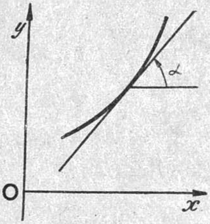
9. 5. ĐỊNH-LÝ ĐẢO.

Ta *công-nhận* định-lý sau này :

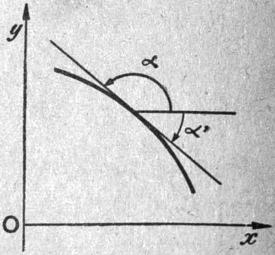
Coi một hàm-số f (x) xác-định và có đạo-hàm trong khoảng (a.b). Giả-sử đạo-hàm f′ (x) không triệt-tiêu trong khoảng đó và không đổi dấu.

1. **Nếu f′ (x) luôn luôn dương, thì f (x) đồng-biến trong khoảng (a, b).**

2. **Nếu $f'(x)$ luôn luôn âm, thì $f(x)$ nghịch-biến trong khoảng (a, b).**



Hình 23



Hình 24

Về phương-diện đồ-thị, ta thấy rằng:

1. Nếu $f(x)$ ~~nghịch~~ đồng-biến, đường biểu-diễn của nó vênh lên từ trái sang phải, α là góc nhọn, tang của góc đó là số dương, do đó

$$f'(x) > 0 \text{ và đảo lại } (h.\ 23).$$

2. Nếu $f'(x)$ nghịch-biến, đường biểu-diễn của nó chúc xuống từ trái sang phải, α là góc tù, tang của góc đó là số âm, do đó

$$f'(x) < 0 \text{ và đảo lại } (h.\ 24).$$

9. 6. CỰC-ĐẠI VÀ CỰC-TIỂU.

Trước đây, ta đã định-nghĩa thế nào là cực-đại hay cực-tiểu của một hàm-số.

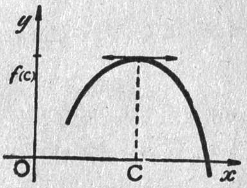
ĐỊNH-LÝ.

Coi một hàm-số $y = f(x)$ xác-định và có đạo-hàm trong khoảng (a, b). Gọi c là một trị-số trong khoảng (a, b) đó.

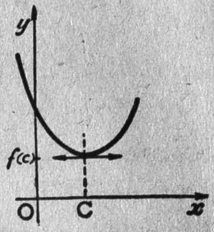
1. Điều-kiện ắt có và dủ để cho $f(x)$ qua một cực-đại khi $x = c$ là: x lớn dần lên qua trị-số c thì $f'(x)$ triệt-tiêu và đổi dấu từ dương sang âm.

2. Điều-kiện ắt có và đủ để cho f (x) qua một cực-tiểu khi x = c là : x lớn dần lên qua trị-số x = c thì f′ (x) triệt-tiêu và đổi dấu từ âm sang dương.

Ta đoán-nhận những điều trên bằng các đồ-thị sau (*h. 25* và *h. 26*)



Hình 25



Hình 26

9. 7. THÍ-DỤ.

Lập bảng biến-thiên và xét cực-đại, cực-tiểu của hàm-số

$$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4.$$

$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4 \Rightarrow y' = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x^2 + 4x + 3)$. $x^2 + 4x + 3$ là một tam-thức bậc hai đối với x, nó có hai nghiệm-số là -3 và -1.

Ta xét dấu của tam-thức đó dễ-dàng.

Biết dấu của y', ta suy ra chiều biến-thiên của hàm-số và có *bảng biến-thiên* sau.

x	$-\infty$		-3		-1		$-\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		↗	4 CĐ	↘	0 ct	↗	

Khi x đi qua trị-số -1 thì đạo-hàm triệt-tiêu đổi dấu từ âm sang dương, hàm-số đang nghịch-biến trở thành đồng-biến, vậy hàm-số qua một *cực-tiểu*. Trị-số của cực-tiểu là

$$y = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 9(-3) + 4 = 0$$

Khi x đi qua trị-số -3 thì đạo-hàm triệt-tiêu và đổi dấu từ dương sang âm, hàm-số đang đồng-biến trở thành nghịch-biến, vậy hàm-số qua một *cực-đại*. Trị-số của cực-đại là

$$y = (-3)^3 + 6(-3)^2 + 9(-3) + 4 = 4$$

Bảng biến-thiên trên đây chưa được đầy-đủ vì ta chưa xét các trường-hợp $x \to -\infty$, $x \to +\infty$.

Cần nhớ : khi *y' triệt-tiêu và đổi dấu* thì mới có *cực-trị* (tức là cực-đại hoặc cực-tiểu). Nếu y' chỉ triệt-tiêu mà *không* đổi dấu thì không nói đến cực-trị được.

9. 8. PHƯƠNG-PHÁP KHẢO-SÁT MỘT HÀM-SỐ.

Khi muốn khảo-sát sự biến-thiên của một hàm-số nhờ dấu đạo-hàm của nó, người ta làm những việc chính sau đây :

1. Tìm những trị-số của x làm cho hàm-số không xác-định.

2. Tính đạo-hàm, tìm những trị-số của x làm triệt-tiêu *đạo-hàm*, xét dấu của đạo-hàm đó.

3. Xếp thứ-tự những trị-số đặc-sắc của x mới tìm thấy ở trên, lập một cái bảng trong đó có nhiều khoảng, ở mỗi khoảng đó :

- hàm-số được xác-định, đạo-hàm cũng xác-định.
- đạo-hàm không đổi dấu.

Biết dấu của đạo-hàm thì ta suy ra chiều biến-thiên của hàm-số bằng định-lý đảo mới học ở trên.

4. Tính trị-số hay giới-hạn của $f(x)$ tại những cận của mỗi khoảng.

5. Vẽ đường biểu diễn và vài tiếp-tuyến đặc-sắc.

Trong những chương tiếp theo, chúng ta sẽ gặp nhiều thí-dụ với nhiều chi-tiết hơn lời dặn đại-cương trên đây.

10. HÀM-SỐ BẬC HAI

Hàm-số bậc hai là một hàm-số có dạng-thức

$$y = ax^2 + bx + c$$

trong đó a phải khác số không, bởi vì nếu $a = 0$ thì ta có hàm-số bậc nhất.

10. 1. THÍ-DỤ.

Khảo-sát hàm-số $y = f(x) = x^2 - 3x - 4$

1. Hàm-số đó được *xác-định* với mọi trị-số của x.

2. *Đạo-hàm* là $y' = 2x - 3$. Đề xét dấu của y, ta áp-dụng định-lý về dấu của nhị-thức.

y' triệt-tiêu và đồi dấu khi $x = \frac{3}{2}$

Nếu $x > \frac{3}{2}$ thì $y' > 0$.

Nếu $x < \frac{3}{2}$ thì $y' < 0$.

3. Biết dấu của đạo-hàm, ta suy ra *chiều biến-thiên* của hàm-số, và ta có bảng biếu-thiên sau :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	ct	↗	$+\infty$

4. Khi $x = \frac{3}{2}$ thì y qua một *cực-tiểu* mà trị-số là :

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{25}{4}$$

Để khảo-sát y khi $|x| \rightarrow \infty$*, ta viết :

$$y = x^2 - 3x - 4 = x^2\left(1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)$$

Khi $|x| \rightarrow \infty$, hai số-hạng $\frac{3}{x}$ và $-\frac{4}{x^2}$ không đáng kể nữa, y tương-đương với x^2.

Vì thế, khi $|x| \rightarrow \infty$ thì $y \rightarrow +\infty$.

5. Muốn tìm những *điểm trên trục y*, thì ta cho $x = 0$. Lúc đó ta được $y = -4$.

Muốn tìm những *điểm trên trục x*, thì ta cho $y = 0$. Lúc đó ta có :

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \text{tức là} \quad x = -1, \quad x = 4.$$

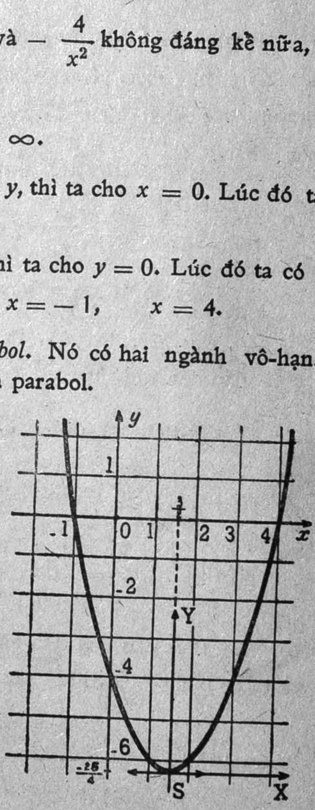
6. *Đường biểu-diễn* gọi là một *parabol*. Nó có hai ngành vô-hạn. Điểm S, ứng với cực-tiểu, gọi là *đỉnh* của parabol.

7. Phương-trình thu gọn :

Đem gốc tọa-độ O đến đỉnh $S\left(\frac{3}{2}; -\frac{25}{4}\right)$ bằng phép tịnh-tiến theo vectơ $\overrightarrow{OS}$.

Công-thức đổi trục viết là :

$$x = X + x_S = X + \frac{3}{2}.$$



Hình 27

---

* $|x| \rightarrow \infty$ bao gồm hai trường-hợp $\begin{cases} x \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow +\infty \end{cases}$

$$y = Y + y_s = Y - \frac{25}{4}$$

Hàm-số $y = x^2 - 3x - 4$ thành ra :

$$Y - \frac{25}{4} = \left(X + \frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(X + \frac{3}{2}\right) - 3$$

Khai-triển và ước-lược ta được $Y = X^2$

Đó là *phương-trình thu gọn* của parabol.

Viết dưới dạng-thức đó, ta nhận thấy $Y = X^2$ là một hàm-số chẵn, điều này tỏ rằng parabol nhận trục SY làm trục đối-xứng. (hệ trục thẳng góc)

10. 2. TRƯỜNG-HỢP CHUNG.

Khảo-sát hàm-số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

1. Hàm-số được *xác-định* với mọi trị-số của x.

2. *Đạo-hàm* là $y' = 2ax + b$.

Nó triệt-tiêu và đổi dấu khi $x = -\frac{b}{2a}$.

3. *Bảng biến-thiên.* Ta chú-ý đến 2 trường-hợp : $a > 0$ và $a < 0$

$$\boxed{a > 0}$$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	ct	↗	$+\infty$

Khi $a > 0$ thì y có cực-tiểu.

$$\boxed{a < 0}$$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	$-\infty$

Khi $a < 0$ thì y có cực-đại.

4. *Cực-đại* hay *cực-tiểu.*

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$$

5. *Giới-hạn* của y khi $|x| \to \infty$. Lúc đó ta viết :

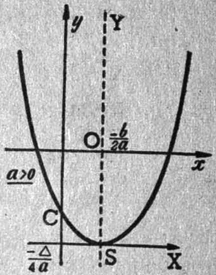
$$y = ax^2\left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2}\right) ; \quad \frac{b}{ax} \text{ và } \frac{c}{ax^2}$$

không đáng kể nữa và y tương-đương với số-hạng bậc cao nhất là ax^2.

Khi $|x| \to \infty$ thì $x^2 \to +\infty$.

Như thế, y cũng tiến tới vô-cực và vô-cực đó theo dấu của a.

6. *Đường biểu-diễn* của hàm-số là một *parabol*, nó có hai ngành vô-hạn. Điểm S, ứng với cực-tiểu hay cực-đại của hàm-số, gọi là *đỉnh* parabol.



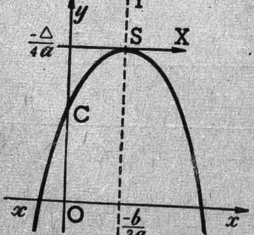
Hình 28 $\boxed{a < 0}$

Nếu *a dương,* thì *bề lõm* của parabol quay về phía *y dương* (*h. 28*)

Nếu *a âm,* thì *bề lõm* của parabol quay về phía *y âm* (*h. 29*)

7. *Phương-trình thu gọn :*

Ta đem gốc tọa-độ O đến đỉnh $S\left(\frac{-b}{2a} ; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.



Hình 29 $\boxed{a < 0}$

Công-thức đổi trục viết là :

$$x = X + x^s = X - \frac{b}{2a}$$

$$y = Y + y_s = Y + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Hàm-số $y = ax^2 + bx + c$ thành ra

$$Y + \frac{4ac - b^2}{4a} =$$

$$a\left(X - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(X - \frac{b}{2a}\right) + c$$

Khai-triển và ước-lược, ta được : $Y = aX^2$.

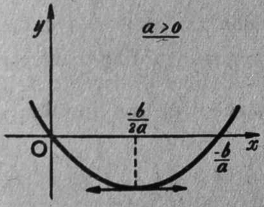
Đó là *phương-trình thu gọn* của parabol.

Hàm-số đó là một *hàm-số chẵn,* vậy parabol có *trục đối-xứng* là trục SY. (hệ trục thẳng góc)

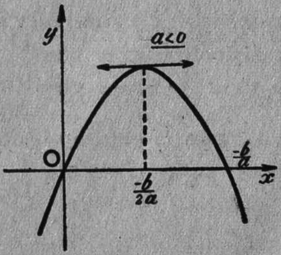
10. 3. TRƯỜNG-HỢP RIÊNG.

1. $y = ax^2 + bx = x(ax + b)$.

Nếu gặp hàm-số $y = ax^2 + bx$, ta nhìn dấu của a thì sẽ biết hàm-số có cực-đại hay cực-tiểu, hoành-độ của đỉnh là $-\frac{b}{2a}$; trị-số của cực-tiểu hay cực-đại là $-\frac{\Delta}{4a} = \frac{-b^2}{4a}$ (vì $c = 0$); đường biểu-diễn cắt trục x ở những điểm mà hoành-độ là 0 và $-\frac{b}{a}$ (*h. 30* và *h. 31*)



Hình 30

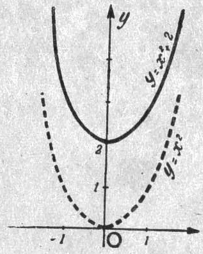


Hình 31

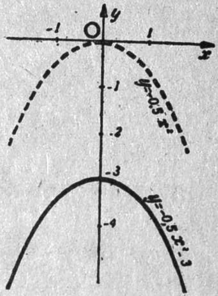
2. $y = ax^2 + c$.

Gặp trường-hợp $b = 0$, ta có $y = ax^2 + c$. Muốn vẽ đường biểu-diễn, ta chỉ việc vẽ parabol P biểu-diễn hàm-số đơn-giản $y = ax^2$, rồi cho P *tịnh-tiến* theo phương $y'y$, vectơ tịnh-tiến có số đo đại-số là c.

Thí-dụ :



Hình 32



Hình 33

Vậy ta nhớ rằng :

— Nếu $b = 0$ thì parabol đi qua gốc tọa-độ.

— Nếu $c = 0$ thì đỉnh của parabol nằm trên trục y.

10. 4. CÁCH TÌM PHƯƠNG-TRÌNH CỦA PARABOL.

Phương-trình của parabol là $y = ax^2 + bx + c$. Định phương-trình của một parabol là tìm ba hệ-số a, b, c. Muốn tìm ba hệ-số a, b, c đó thì phải viết được ba phương-trình riêng rẽ, lập thành một hệ-thống rồi giải.

Thí-dụ 1. **Tìm phương-trình của parabol đi qua ba điểm :**

$$\mathbf{A\ (-2\ ;\ -2)\ ;\quad B\left(5\ ;\ \frac{-1}{4}\right)\quad \text{và}\quad C\ (2\ ;\ 2)}$$

Phương-trình phải tìm có dạng-thức :

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

Nói rằng parabol đi qua điểm A $(-2\ ;-2)$ có nghĩa là tọa-độ $x = -2$, $y = -2$ của điểm A thỏa cho hệ-thức (1) :

$$-2 = 4a - 2b + c \qquad (2)$$

Tương-tự, ta có : $-\frac{1}{4} = 25a + 5b + c \qquad (3)$

$$2 = 4a + 2b + c \qquad (4)$$

Hệ-thống ba phương-trình lập bởi (2), (3), (4) cho phép ta tính a,b,c.

Lấy (4) trừ cho (2) vế với vế thì có :

$$4 = 4b$$

Suy ra $\mathbf{b = 1}$

Như thế, (2) và (3) thành ra :

$$\begin{cases} 0 = 4a + c & (2') \\ -\frac{21}{4} = 25a + c & (3) \end{cases}$$

Trừ vế, ta có : $\frac{21}{4} = -21a$

Suy ra $\mathbf{a = -\frac{1}{4}}$

Theo (2′) thì $c = -4a$ nên $\mathbf{c = 1}$

Do đó, phương-trình của parabol là :

$$\mathbf{y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 1}$$

Thí-dụ 2. Tìm phương-trình của parabol mà đỉnh là điểm S (1 ; 2) và đi qua điểm A (2 ; 1).

Phương-trình phải tìm có dạng-thức :

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

Đạo-hàm là : $y' = 2ax + b$

Nói rằng parabol đi qua A (2 ; 1), có nghĩa là tọa-độ $x = 2$, $y = 1$ của điểm A thỏa cho phương-trình (1) :

$$1 = 4a + 2b + c \qquad (2)$$

Vì parabol còn đi qua điểm S (1 ; 2) nên ta có :

$$2 = a + b + c \qquad (3)$$

Nói rằng parabol nhận điểm S (1 ; 2) làm đỉnh, có nghĩa là tại S ($x = 1$) tiếp-tuyến phải nằm ngang, tức là đạo-hàm triệt-tiêu. Vậy $y' = 0$ khi $x = 1$. Do đó : $0 = 2a + b$ (4)

Hệ-thống hợp bởi ba phương-trình (2),(3),(4) cho phép ta tính a, b, c.

Lấy (2) trừ đi (3) vế với vế thì có :

$$-1 = 3a + b \qquad (5)$$

Lấy (5) hợp với (4), ta có hệ-thống :

$$\begin{cases} 0 = 2a + b \\ -1 = 3a + b \end{cases}$$

Trừ vế, ta được ngay : $\mathbf{a = -1}$

Theo (4) thì $b = -2a$ nên $\mathbf{b = 2}$

Ta dùng (3) để tính c :

$$c = 2 - a - b = 2 + 1 - 2 \quad \text{tức} \quad \mathbf{c = 1}$$

Phương-trình phải tìm là :

$$\mathbf{y = -x^2 + 2x + 1}$$

10. 5. SỰ TƯƠNG-GIAO CỦA HAI ĐƯỜNG CONG.

Trong một đồ-thị chung, ta vẽ đường biểu-diễn của hai hàm-số $y = f(x)$, $y = g(x)$. *Nhìn* trên đồ-thị, ta có thể biết tọa-độ các giao-điểm. Muốn *tính* tọa-độ các giao-điểm, ta lý-luận như sau :

Tọa-độ của các giao-điểm, nếu có, là nghiệm-số của hệ-thống :

$$\begin{cases} y = f(x) & (1) \\ y = g(x) & (2) \end{cases}$$

Khử y giữa hai phương-trình đó, ta có :

$$f(x) = g(x) \qquad (3)$$

Những nghiệm-số của phương-trình này, nếu có, là hoành-độ của các giao-điềm mà ta phải tìm. Vì thế, (3) gọi là *phương-trình để tìm hoành-độ các giao-điềm*, có khi gọi ngắn là *phương-trình hoành-độ*.

Được hoành-độ rồi, ta chỉ việc dùng (1) hoặc (2) đề tìm tung-độ tương-ứng.

Thí-dụ 1. Tìm tọa-độ giao-điềm của hai parabol mà phương-trình là :

$$\mathbf{y = x^2 + 3x + 2} \qquad \mathbf{(1)}$$
$$\mathbf{y = 2x^2 + 4x} \qquad \mathbf{(2)}$$

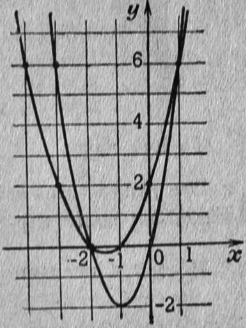
Tọa-độ giao-điềm, nếu có, phải thỏa cho cả hai phương-trình (1) và (2) cùng một lúc. Chúng là nghiệm-số của hệ-thống :

$$\begin{cases} y = x^2 + 3x + 2 \\ y = 2x^2 + 4x \end{cases}$$

Khử y giữa hai phương-trình đó, ta có

$$x^2 + 3x + 2 = 2x^2 + 4x$$

Suy ra $\quad x^2 + x - 2 = 0$



Hình 34

Đó là *phương-trình đề tìm hoành-độ các giao-điềm*. Khi giải ra, ta có

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = -2$$

Dùng (2) đề tính y tương-ứng, ta được

$$y_1 = 6, \qquad y_2 = 0$$

Vậy giao-điềm M, N của hai parabol là :

$$\mathbf{M\,(1\,;\,6)\,;\ N\,(-\,2\,;\,0).}$$

Thí-dụ 2. Tìm tọa-độ giao-điềm của hai parabol mà phương-trình là :

$$\mathbf{y = -\,2x^2 + 2x} \qquad \mathbf{(1)}$$
$$\mathbf{y = x^2 - 4x + 3} \qquad \mathbf{(2)}$$

Phương-trình để tìm hoành-độ các giao-điểm là :

$$-2x^2 + 2x = x^2 - 4x + 3$$
$$3x^2 - 6x + 3 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Phương-trình trên có nghiệm-số kép là $x_1 = x_2 = 1$

Trị-số tương-ứng của y là :

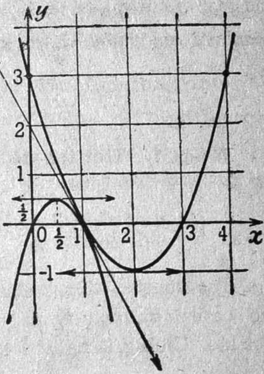
$$y = -2x^2 - 2x = 0$$

Ta kết-luận rằng *hai parabol tiếp-xúc nhau tại điểm T mà tọa-độ là :*

$$\mathbf{x = 1,\ y = 0}$$

Ta nhớ rằng :

Nếu phương-trình hoành-độ có nghiệm số kép thì hai parabol tiếp-xúc nhau.



Hình 35

Thí-dụ 3. Chứng-minh rằng những parabol (P) mà phương-trình là : $y = (m - 1)x^2 + 2max + (m + 1)a^2$ (a là một số cho sẵn $\neq 0$ và m là một thông-số $\neq 1$) bao giờ cũng cắt trục x'x, bất-chấp m.

Phương-trình của trục $x'x$ là $y = 0$.

Phương-trình của những parabol (P) là :

$$y = (m - 1)x^2 + 2max + (m + 1)a^2$$

Phương-trình để tìm hoành-độ các giao-điểm của (P) với trục $x'x$ là :

$$(m - 1)x^2 + 2max + (m + 1)a^2 = 0 \qquad (1)$$

Biệt-số thu gọn của phương-trình bậc hai đó là :

$$\Delta' = m^2a^2 - (m - 1)(m + 1)a^2$$
$$= m^2a^2 - (m^2 - 1)a^2$$
$$= m^2a^2 - m^2a^2 + a^2 = a^2 > 0$$

Vì $\Delta' > 0$ nên phương-trình (1) có hai nghiệm-số, bất-chấp m. Do đó, ta kết-luận rằng những parabol (P) bao giờ cũng cắt trục $x'x$ bất-chấp m.

Thí-dụ 4. Theo m, biện-luận sự tương-giao của parabol (P) và đường thẳng (D) mà phương-trình lần-lượt là :

$$y = x^2 - 4x + 3$$

$$y = -2x + m \quad \text{(m là một thông-số)}$$

Phương-trình để tìm hoành-độ các giao-điềm của (P) và (D) viết là :

$$x^2 - 4x + 3 = -2x + m$$

hay $$x^2 - 2x + 3 - m = 0 \qquad (1)$$

Biệt-số thu gọn của phương-trình (1) là :

$$\Delta' = 1 - (3 - m) = m - 2$$

Khi $m < 2$ thì $\Delta' < 0$, (P) và (D) không cắt nhau.

Khi $m = 2$ thì $\Delta' = 0$, $x_1 = x_2 = 1$ và $y_1 = y_2 = 0$. (P) và (D) tiếp-xúc tại điềm T mà tọa-độ là (1 ; 0)

Khi $m > 2$ thì $\Delta' > 0$, (P) và (D) cắt nhau tại hai điềm

m	$-\infty$	2	$+\infty$
(P) và (D)	không cắt nhau	tiếp-xúc	cắt nhau tại hai điềm

10. 6. CÁCH SO-SÁNH HAI SỐ α, β VỚI HAI NGHIỆM-SỐ CỦA MỘT PHƯƠNG-TRÌNH BẬC HAI.

Cho phương-trình bậc hai $x^2 - 2x - (1 + m) = 0$. Hãy so-sánh những nghiệm-số của phương-trình đó, nếu có, với hai số -1 và 4.

Ta viết phương-trình bậc hai đã cho như sau :

$$x^2 - 2x - 1 = m$$

rồi đặt
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 1 & (1) \\ y = m & (2) \end{cases}$$

Đường biểu-diễn của hàm-số thứ nhất là một parabol (P). Đường biểu-diễn của hàm-số thứ nhì là một đường thẳng (D) song-song với trục hoành-độ.

Hoành-độ giao-điểm, nếu có của (D) và (P) là nghiệm-số của phương-trình

$$x^2 - 2x - (1 + m) = 0$$

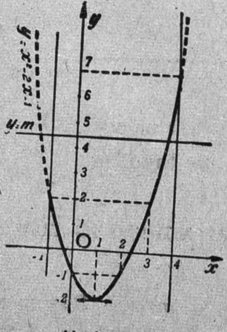
Trên đồ-thị, ta kẻ thêm hai đường thẳng song-song với trục tung-độ, có hoành-độ lần-lượt là — 1 và 4.

Khi m thay đổi thì chỉ có đường thẳng (D) chuyển-động thôi.

Tùy theo m, ta định được vị-trí của hai số — 1 và 4 đối với hai nghiệm-số x', x'' của phương-trình đã cho trong đầu bài.

Bảng so-sánh ở ngay bên cạnh của đồ-thị.

Ta nên nhận-xét rằng phương-pháp trên đây chỉ đem áp-dụng được khi ta tách được m đứng riêng một mình ; có như thế, mới có đường thẳng (D) song-song với trục hoành-độ.



Hình 36

m	Bảng so-sánh
$+\infty$	
	$x' < -1 < 4 < x''$
7	$x' < -1 < x'' = +4$
	$x' < -1 < x'' < 4$
2	$x' = -1 < x'' < 4$
	$-1 < x' < x'' < 0$
-2	$-1 < x' = x'' < 4$
$-\infty$	
	VÔ-NGHIỆM

10. 7. GIẢI BẤT-PHƯƠNG-TRÌNH BẰNG ĐỒ-THỊ.

Giả-sử ta phải giải bất-phương-trình sau đây bằng đồ-thị :

$$-x^2 + 2x + 3 > \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$$

Ta làm như sau :

— Vẽ đường biểu-diễn (P_1), (P_2) của hai hàm-số

$$y_1 = -x^2 + 2x + 3$$

$$y_2 = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$$

vào một đồ-thị chung.

— Tìm hoành-độ các giao-điểm (nhìn đồ-thị).

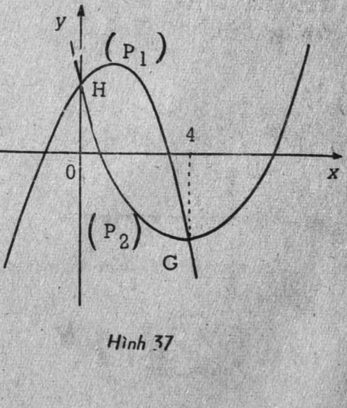
— Tìm trên đồ-thị những trị-số của x sao cho $y_1 > y_2$, nghĩa là (P_1) *ở phía trên* (P_2).

Hoành-độ các giao-điểm của (P_1), (P_2) là

$$x' = 0, \ x'' = 4.$$

Để cho $y_1 > y_2$ ta phải chọn

$$0 < x < 4$$



Hình 37

BÀI TẬP

- **Vẽ parabol. Khảo-sát hàm-số bậc hai.**

Khảo-sát sự biến-thiên của những hàm-số sau này và vẽ đường biểu-diễn :

10. 1. $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 5$

10. 2. $y = -x^2 + 4x - 2$

10. 3. $y = x^2 - 4x$

10. 4. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$

10. 5. $y = (x - 5)^2$

10. 6. $y = -2(1 + x)^2$

- **Sự tương-giao của hai đường biểu diễn.**

Giả-sử ta có đường biểu-diễn của những cặp hàm-số sau này, hãy định tọa-độ giao điểm bằng phép tính :

10. 7 $\begin{cases} y = x^2 - 10x + 3 \\ y = 4x - 10 \end{cases}$

10. 8. $\begin{cases} y = 3x^2 + x - 10 \\ y = -x + 11 \end{cases}$

10. 9. $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ y = -x^2 + 2x - 3 \end{cases}$

10. 10. $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 1 \\ y = x - 5 \end{cases}$

10. 11. $\begin{cases} y = 3x^2 + x - 2 \\ y = -2x^2 - 2x \end{cases}$

10. 12. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 - x - 1 \end{cases}$

- **Biện-luận sự tương giao.**

Tùy theo m, biện-luận sự tương-giao của những cặp đường cong (hay thẳng) sau này :

10. 13. $\begin{cases} y = x^2 + 2x + 4 \\ y = 3mx \end{cases}$

10. 14. $\begin{cases} y = mx^2 - 2x - 5 \\ y = 2x - m \end{cases}$

10. 15. $\begin{cases} y = mx^2 - 3x + 1 \\ y = -mx + 1 \end{cases}$

10. 16. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = m(x - 1) - \frac{1}{4} \end{cases}$

10. 17. *Chứng tỏ rằng hai parabol :*

$$y = ax^2 + (1 - 3a)\,x + 2a$$

$$y = -\,ax^2 + (1 + 3a)\,x - 2a$$

cắt nhau tại hai điểm, bất-chấp a. Định rõ hai điểm đó. Người ta kẻ những tiếp-tuyến của hai parabol tại hai điểm nói trên. Chứng tỏ rằng chúng làm thành một hình bình-hành.

- **Phương-trình của parabol :**

Tìm phương-trình của parabol P, biết rằng :

10. 18. *P đi qua A (2, 3), B (3, 5) và C (0, 2),*

10. 19. *P đi qua A (1, 0) và có đỉnh là (2, — 1).*

10. 20. *P cắt trục x tại hai điểm mà hoành-độ là 2, 3 và đi qua điểm A (1 ; 2).*

10. 21. *P cắt trục y tại điểm có tung-độ là 1 và tiếp-xúc với đường thẳng* $y = -\,8x - 2$ *tại điểm T (— 1 ; 6).*

- **Biện-luận bằng đồ-thị. Giải bất-phương-trình bằng đồ-thị.**

10. 22. *Dùng đồ-thị để so-sánh hai số* $\frac{1}{2}$ *và 3 với hai nghiệm-số của phương-trình*

$$x^2 - 2x + 2 - m = 0.$$

10. 23. *Dùng đồ-thị để xét sự khả-hữu và dấu các nghiệm-số của phương-trình*

$$x^2 - 4x - m = 0.$$

10. 24. *1. Vẽ đường biểu-diễn* (P_1) *và* (P_2) *của hai hàm-số sau vào một đồ-thị chung :*

$$y = 2x - x^2 \;;\; y = x^2 - 4x$$

Tính tọa-độ các giao-điểm của (P_1), (P_2).

2. Dùng đồ-thị để giải bất-phương-trình

$$2x - x^2 > x^2 - 4x$$

10. 25. *1. Vẽ vào một đồ-thị chung đường biểu-diễn của hai hàm-số*

$$y_1 = \frac{1}{2}x^2 - x - 1, \quad y_2 = -\,\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$$

2. *Tính tọa-độ giao-điểm.*

3. *Dùng đồ-thị để giải bất-phương-trình*

$$\frac{1}{2}x^2 - x - 1 < -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$$

● **Sự tương-giao của một parabol và một đường thẳng.**

10. 26. 1. *Khảo-sát sự biến-thiên của hàm-số* $y = \frac{x^2}{2} + 2x$ *và vẽ đường biểu-diễn (C) của hàm-số đó.*

2. *Chứng-minh rằng đường thẳng (D) mà phương-trình là* $y = \frac{3x}{4}$ *cắt đường cong (C) ở gốc tọa-độ O và ở một điểm A. Tính tọa-độ của A.*

3. *Tính độ dốc ; rồi tìm phương-trình của những tiếp-tuyến của đường cong (C) ở điểm O và A.*

4. *Tính tọa-độ điểm B, giao-điểm của những tiếp-tuyến kẻ từ O và A. Chứng-minh rằng trung-tuyến BM của tam-giác ABO song-song với trục* $y'y$.

● **Dây cung bằng nhau trong hai parabol.**

10. 27. *Coi hai hàm-số :*

$$y_1 = -x^2 + 2x + 3$$

$$y_2 = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$$

1. *Vẽ trên cùng một đồ-thị các đường cong biểu-diễn những hàm-số đó Lần-lượt ta gọi những đường cong này là* (P_1) *và* (P_2).

2. *Hãy định bằng phép tính tọa-độ giao-điểm A, B của hai đường biểu-diễn* (P_1) *và* (P_2).

3. *Với những trị-số nào của m thì đường thẳng (D) có phương-trình* $y = m$ *cắt* (P_1) *và* (P_2) ?

(D) cắt (P_1) *tại* M_1, N_1 *và cắt* (P_2) *tại* M_2, N_2. *Hãy định m để những đoạn thẳng* M_1N_1 *và* M_2N_2 *có độ dài bằng nhau.*

● **Giải bất-phương-trình bậc hai.**

10. 28. 1. *Giải bất-phương-trình :*

$$-\frac{2x^2}{3} + \frac{4x}{3} + 2 > x(x-1)$$

2. Vẽ đường biểu-diễn sự biến-thiên của hai hàm-số :

$$y_1 = -\frac{2x^2}{3} + \frac{4x}{3} + 2 \quad \text{và} \quad y_2 = x(x-1)$$

ta được hai đường cong (C_1) và (C_2).

Tính tọa-độ những giao-điểm của (C_1) và (C_2).

Tìm lại kết-quả của câu 1 bằng đồ-thị.

3. Gọi a và b là hai nghiệm-số của phương-trình $y_2 = 0$; c và d là hai nghiệm-số của phương-trình $y_2 = 0$. Tìm hai số x' và x'' thỏa cho cả hai phương-trình sau đây :

$$2x'x'' - (a+b)(x'+x'') + 2ab = 0$$

$$2x'x'' - (c+d)(x'+x'') + 2cd = 0$$

10. 29. Coi hàm-số $y = 3x^2 - 4x + 1$ và gọi (C) là đường biểu-diễn.

1. Tính đạo-hàm. Khảo-sát sự biến-thiên. Khi $|x| \to \infty$ thì y ra sao ? Xét sự tương-giao của (C) với hai trục tọa-độ. Vẽ (C).
2. Vẽ tiếp-tuyến At với (C) tại điểm A $(x = +1)$.
3. Viết phương-trình của At.
4. x' và x'' là hoành-độ giao-điểm của (C) với hai trục. Lập phương-trình bậc hai mà nghiệm-số là nghịch-đảo của x', x''.

10. 30. 1. Vẽ đường biểu-diễn (P) của hàm-số : $y = -\frac{x^2}{4} + 2x$

2. Tìm phương-trình của đường thẳng (L) có hệ-số góc m và đi qua điểm cố-định E (2 ; 4)
3. Tùy theo m, khảo-sát sự tương-giao của (P) và (L).

10. 31. 1. Khảo-sát sự biến-thiên và vẽ đường biểu-diễn (P) của hàm-số sau :

$$y = -\frac{x^2}{2} + 3x - 4$$

2. Gọi (C) là đường biểu-diễn của hàm-số $y = -x^2 + bx + 2$.

   a) Tìm phương-trình của (C) biết rằng nó qua một cực-đại khi $x = \frac{5}{2}$ và khi $x = 2$ thì $y = 2$.

   b) Khảo-sát sự biến-thiên của hàm-số và vẽ (C).

3. Tính tọa-độ của A và B, giao-điểm của (P) và (C).

10. 32. 1. *Vẽ đường biểu-diễn (C) của hàm-số :* $y = -x^2 + 5x - 4$.

2. *Viết phương-trình của họ đường thẳng (D) có độ dốc m và đi qua điểm P (2 ; 2).*

3. *Khảo-sát sự tương-giao của (D) và (C). Tính m để (D) tiếp-xúc với (C).*

4. *Gọi M′, M″ là những giao-điểm, nếu có, của (C) và (D). Tính tọa-độ x, y của trung-điểm I của đoạn M′, M″ theo m. Tìm một hệ-thức giữa x, y độc-lập với m.*

10. 33. *Gọi (C) là đường biểu-diễn của hàm-số :* $y = x^2 - 3x + 4$

Gọi (C′) là đường biểu-diễn của hàm-số : $y = \dfrac{x^2}{2} - x + 2$

1. *Vẽ (C) và (C′) trong cùng một đồ-thị.*

2. *Chứng-minh rằng (C) và (C′) chỉ có một điểm chung độc nhất A. Tính tọa-độ của A.*

3. *Chứng-minh rằng tại A, (C) và (C′) có một tiếp-tuyến chung (T). Tìm phương-trình của (T).*

11. HÀM-SỐ NHẤT-BIẾN

11. 1. ĐỊNH-NGHĨA.

Hàm-số nhất-biến là một hàm-số có dạng-thức

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

trong đó c phải khác số không, vì nếu $c = 0$ thì ta có một hàm-số bậc nhất.

Ta có cảm-giác rằng y phụ-thuộc vào bốn thông-số a, b, c, d. Sự thật, ta có thể chia trên và dưới cho một trong bốn số a, b, c, d. Chỉ có c là $\neq 0$ chắc-chắn, nên ta chia cho c :

$$y = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}}$$

Đặt $\quad \frac{a}{c} = A \; ; \; \frac{b}{c} = B \; ; \; \frac{d}{c} = D$

thì ta có $\quad y = \frac{Ax + B}{x + D}$

Xem thế, y chỉ phụ-thuộc vào ba thông-số A, B, D mà thôi.

11. 2. THÍ-DỤ.

Khảo-sát hàm-số $y = \frac{2x + 1}{x + 1}$

— Hàm-số đã cho không xác-định khi $x = 1$ vì lúc đó mẫu-số triệt-tiêu, tử-số bằng 3, ta không thực-hiện tính chia 3 cho 0 được.

— *Khảo-sát y khi x tiến tới 1.*

Khi x tiến tới 1, thì tử-số $2x + 1$ tiến tới 3 ; mẫu-số tiến tới 0.

Giả-sử x tiến tới 1 từ bên trái lại, lúc đó x vẫn nhỏ hơn 1, vì vậy $x - 1 = -\varepsilon$ (ε là một số *dương* rất nhỏ, nhỏ hơn bất cứ số nào nhỏ mà ta có thể tưởng-tượng ra).

Do đó $y = \dfrac{3}{-\varepsilon}$. Ta suy rằng ra y tiến tới $-\infty$.

Giả-sử x tiến tới 1 từ bên phải lại, lúc đó x vẫn lớn hơn 1, vì vậy $x - 1 = +\varepsilon$.

Do đó $y = \dfrac{3}{+\varepsilon}$. Ta suy rằng y tiến-tới $+\infty$.

— *Khảo-sát y khi x vô-cực* ($|x| \to \infty$)

Ta có
$$y = \frac{2x + 1}{x + 1}$$

Đặt x làm thừa-số chung rồi giả-sử $x \neq 0$ để đơn-giản phân-số :

$$y = \frac{x\left(2 + \dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)} = \frac{2 + \dfrac{1}{x}}{1 - \dfrac{1}{x}}$$

Khi x tiến tới vô-cực thì $\dfrac{1}{x}$ không đáng kể so với những số đứng trước nó. Vì thế, y tiến tới $\dfrac{2}{1} = 2$.

Muốn biết y tiến tới 2 bằng cách nào, ta viết :

$$y = \frac{2x + 1}{x - 1} = \frac{(2x - 2) + 3}{x - 1} = \frac{2x - 2}{x - 1} + \frac{3}{x - 1}$$

$$y = 2 + \frac{3}{x - 1}$$

Ta cũng đạt được kết-quả trên khi đem chia tử-số $2x + 1$ cho mẫu-số $x - 1$.

Khi x tiến-tới $-\infty$ thì $\dfrac{3}{x-1}$ tiến tới 0 và âm, vậy $y = 2 - \varepsilon$ nghĩa là y tiến tới 2 nhưng vẫn nhỏ hơn 2.

Khi x tiến tới $+\infty$ thì $\dfrac{3}{x-1}$ tiến tới 0 và dương, vậy $y = 2 + \varepsilon$ nghĩa là y tiến tới 2 nhưng vẫn lớn hơn 2.

— *Đạo-hàm của hàm-số* $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ là

$$y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

Đạo-hàm không xác-định khi $x = 1$. Ngoài trị-số $x = 1$ thì đạo-hàm luôn luôn âm. Do đó, hàm-số luôn luôn nghịch-biến. [Cũng vì chỉ biến-thiên có một chiều như thế nên hàm-số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ mới được gọi là *hàm-số nhất-biến*].

— *Bảng biến-thiên :*

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	2

— *Bảng trị-số.* Ta cho x vài trị-số rồi tính trị-số tương-ứng của y:

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3	4
y	$\frac{1}{2}$	0	-1	$\|$	5	$\frac{7}{2}$	3

Được một số điểm mà tọa-độ là từng cặp trị-số x, y ở trên, ta vẽ được đường biểu-diễn của hàm-số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Đường biểu-diễn đó là một *hyperbol.*

— *Đường tiệm-cận.*

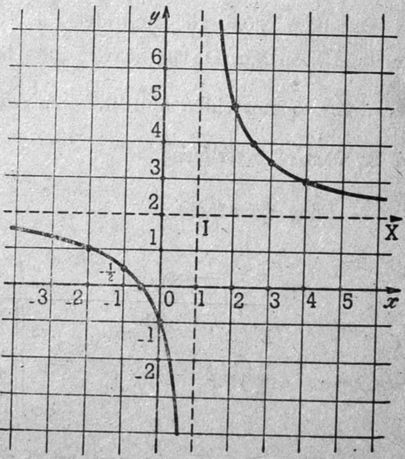
Coi đường thẳng $y = 2$. Trong sự khảo-sát ở trên, ta nói rằng y chỉ tiến tới 2 chứ không bằng 2. Khoảng cách từ một điểm lấy trên đường biểu-diễn tới đường thẳng $y = 2$ nhỏ dần khi x tiến tới $\pm \infty$. Ta nói rằng *đường thẳng $y = 2$ là một đường tiệm-cận của hyperbol.*

Lại coi đường thẳng $x = 1$.

Ta cũng biết rằng khi x tiến tới 1 thì y tiến tới vô-cực. Khoảng cách từ một điểm lấy trên đường biểu-diễn tới đường thẳng $x = 1$ nhỏ dần khi x tiến tới 1. Ta nói rằng *đường thẳng $x = 1$ là một đường tiệm-cận của hyperbol.*

Nên chú-ý rằng hyperbol có hai ngành nằm trong hai góc đối đỉnh định bởi hai đường tiệm-cận thẳng góc

Khi dùng hệ trục thẳng góc thì hai đường tiệm-cận *thẳng góc* nhau nên ta gọi hyperbol *vuông góc.*



Hình 38

— *Sự đối-xứng của hyperbol.*

Gọi giao-điểm của hai đường tiệm-cận là I. Tọa-độ của I là $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Đem gốc tọa-độ từ O đến I. Công-thức đổi trục là :

$$x = X + x_0 = X + 1 \qquad y = Y + y_0 = Y + 2$$

Hàm-số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ thành ra

$$Y + 2 = \frac{2\,(X+1)+1}{X+1-1} = \frac{2X+3}{X} = 2 + \frac{3}{X}$$

Suy ra $Y = \dfrac{3}{X}$ (một hàm-số lẻ)

Đó là *phương-trình thu gọn* của hyperbol.

Nhờ dạng-thức đó, ta biết rằng hyperbol có tâm đối-xứng là I.

11.3. TRƯỜNG-HỢP CHUNG.

Coi hàm-số nhất-biến $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0)$.

Hàm-số đó *không xác-định* khi $x = -\dfrac{d}{c}$ vì lúc đó mẫu-số triệt-tiêu và tử-số *thường* không triệt-tiêu. Thật vậy, tử-số chỉ triệt-tiêu khi $x = -\dfrac{b}{a}$. [Nếu $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{d}{c}$ thì tử-số và mẫu-số triệt-tiêu cùng một lúc. Ta sẽ xét trường-hợp đặc-biệt đó sau].

— Khi x tiến tới $-\dfrac{d}{c}$ thì mẫu-số tiến tới 0, tử-số tiến tới $a\left(-\dfrac{d}{c}\right) + b$. Vậy y có dạng-thức $\dfrac{K}{\pm\varepsilon}$ (K là một số $\neq 0$), và y thành vô-cực. Dấu của vô-cực đó tùy-thuộc ở dấu của K và dấu của mẫu-số.

— Khi x tiến tới vô-cực, ta viết :

$$y = \frac{ax+b}{ax+d} = \frac{x\left(a + \dfrac{b}{x}\right)}{x\left(c + \dfrac{d}{x}\right)} = \frac{a + \dfrac{b}{x}}{c + \dfrac{d}{x}}$$

Vì x vô-cực, nên $\frac{b}{x}$, $\frac{d}{x}$ không đáng kể so với những số đứng trước chúng. Do đó, y tiến tới $\frac{a}{c}$.

— *Đạo-hàm của hàm-số* $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ là $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

Đạo-hàm cũng không xác-định khi $x = -\frac{d}{c}$.

Ngoài trị-số đó, y' theo dấu của $ad - bc$. Đặt $ad - bc = D$, D gọi là *phương-thức* của hàm-số nhất-biến.

Khi $D > 0$ thì $y' > 0$ và hàm-số đồng-biến.

Khi $D < 0$ thì $y' < 0$ và hàm-số nghịch-biến.

Xem thế, chiều biến-thiên của hàm-số nhất-biến phụ-thuộc vào dấu của phương-thức $D = ad - bc$.

— *Bảng biến-thiên* :

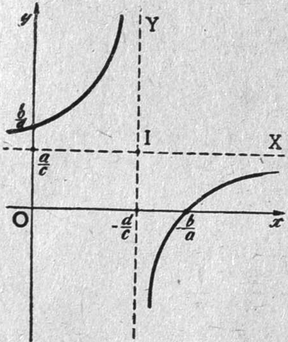
Trường-hợp $ad - bc = D > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	$\frac{a}{c}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{a}{c}$

Trường-hợp $ad - bc = D < 0$:

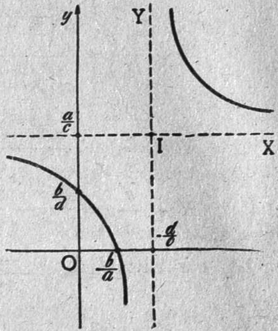
x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$\frac{a}{c}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{a}{c}$

— *Đường biểu-diễn :*



Hình 39

$\boxed{D > 0}$



Hình 40

$\boxed{D < 0}$

Trong cả hai trường-hợp $D > 0$, $D < 0$, đường biểu-diễn của hàm-số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ là một hyperbol mà *hai đường tiệm-cận* là hai đường thẳng mà phương-trình là :

$$x = -\frac{d}{c}\ ,\quad y = \frac{a}{c}\ .$$

— *Tính-cách đối-xứng của hyperbol.*

Gọi I là giao-điểm của hai đường tiệm-cận. Tọa độ của I là

$$x_0 = -\frac{d}{c}\ ,\quad y_0 = \frac{a}{c}\ .$$

Đem gốc tọa-độ O tới I. Công-thức đồi trục viết là :

$$x = X + x_0 = X - \frac{d}{c}$$

$$y = Y + y_0 = Y + \frac{a}{c}$$

Hàm-số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ thành ra

$$Y + \frac{a}{c} = \frac{a\left(X - \dfrac{d}{c}\right) + b}{c\left(X - \dfrac{d}{c}\right) + d}$$

$$Y + \frac{a}{c} = \frac{acX - ad + bc}{c^2X}$$

$$Y + \frac{a}{c} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2X}$$

$$Y = -\frac{ad - bc}{c^2X} = -\frac{D}{c^2} \cdot \frac{1}{X}$$

Đó là *phương-trình thu gọn* của hyperbol. Nó có dạng-thức $Y = \dfrac{A}{X}$.

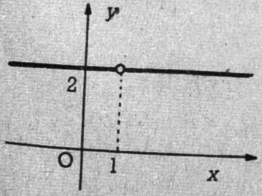
Đó là một hàm-số lẻ. Hyperbol nhận I làm *tâm đối-xứng.*

11. 4. TRƯỜNG-HỢP RIÊNG ad − bc = 0.

Coi hàm-số $y = \dfrac{4x - 2}{-2x + 1}$

Thoạt nhìn, ta nghĩ rằng đường biểu-diễn là một hyperbol. Nhưng khi tính đạo-hàm, ta thấy $ad - bc = 4 - 4 = 0$. Bấy giờ, ta mới chú-ý hơn vì ta gặp một trường-hợp riêng. Ta viết được :

$$y = \frac{4x - 2}{-2x + 1} = \frac{4\left(x - \dfrac{1}{2}\right)}{-2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)}$$



Hình 41

Giả-sử $x - \dfrac{1}{2} \neq 0$ tức là $x \neq \dfrac{1}{2}$

Ta đơn-giản để có $y = \dfrac{4}{-2} = -2$ (hằng-số). Đường biểu-diễn là đường thẳng $y = -2$ *bớt đi* điểm ứng với $x = \dfrac{1}{2}$.

11. 5. CÁCH ĐỊNH PHƯƠNG-TRÌNH CỦA HYPERBOL

Phương-trình của một hyperbol vuông góc có dạng-thức $y = \dfrac{Ax+B}{x+D}$

Định phương-trình của hyperbol là tính A, B, D.

Thí-dụ 1. **Tìm phương-trình trong hệ-thống trục thẳng góc của hyperbol vuông góc qua điểm A (3 ; 2) và có tâm đối-xứng là điểm I (2 ; 1).**

Phương-trình của hyperbol vuông góc là $y = \dfrac{Ax+B}{x+D}$. Ta phải tìm A, B, D.

Nói rằng hyperbol đi qua điểm A (3 ; 2) có nghĩa là tọa-độ của điểm A thỏa cho hệ-thức $y = \dfrac{Ax+B}{x+D}$

Do đó ta được :

$$2 = \frac{3A+B}{3+D} \qquad (1)$$

Tọa-độ của tâm đối-xứng I của hyperbol vuông góc là $x = -D$, $y = A$. Theo giả-thiết thì $x = 2$ và $y = 1$, cho nên

$$-D = 2 \qquad (2)$$

$$A = 1 \qquad (3)$$

Để định B, C, D, ta có hệ-thống phương-trình :

$$\begin{cases} \dfrac{3A+B}{3+D} = 2 & (1) \\ -D = 2 & (2) \\ A = 1 & (3) \end{cases}$$

Ta có $\mathbf{A = 1,\ D = -2}$

(1) thành ra $\dfrac{3+B}{3-2} = 2$

hay $3 + B = 2$ tức $\mathbf{B = -1}$

Vậy phương-trình của hyperbol vuông góc là :

$$y = \frac{x - 1}{x - 2}$$

Thí-dụ 2. Tìm phương-trình trong hệ-thống trục thẳng góc của một hyperbol vuông góc biết rằng nó có hai đường tiệm-cận là $x = -1$, $y = 2$ và nó qua điểm A (1 ; 1).

Phương-trình phải tìm là $y = \dfrac{Ax + B}{x + D}$

Phương-trình của hai đường tiệm-cận là

$$x = -D = -1 \quad (1) \quad \text{và} \quad y = A = 2 \quad (2)$$

Vậy

$$A = 2$$
$$D = 1$$

Phương-trình của hyperbol bây giờ viết là

$$y = \frac{2x + B}{x + 1}$$

Vì hyperbol đi qua A (1 ; 1) nên tọa-độ của A nghiệm đúng hệ-thức trên. Ta có

$$1 = \frac{2 + B}{2} \qquad B = 0$$

Kết-luận :

$$y = \frac{2x}{x + 1}$$

BÀI TẬP

- **Vẽ đường biểu-diễn của những hàm-số sau đây :**

11. 1. $y = \dfrac{12}{x}$ **11. 2.** $y = -\dfrac{36}{x}$

11. 3. $y = \dfrac{x - 3}{x + 1}$ **11. 4.** $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$

11. 5. $y = \dfrac{4}{x-2}$ **11. 6.** $y = \dfrac{x}{2x-5}$

11. 7. $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ **11. 8.** $y = \dfrac{3x-1}{x}$

Vẽ đường biểu-diễn của hai hàm-số sau đây vào một đồ-thị chung :

11. 9. $y = \dfrac{1}{x}$ và $y = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}$

11. 10. $y = \dfrac{2}{x}$ và $y = -2x^2 + 3x + 3$

11. 11. $y = -\dfrac{4}{x}$ và $y = \dfrac{x^2}{2} - 2x - \dfrac{5}{2}$

11. 12. $y = 2 + \dfrac{2x}{1-2x}$ và $y = \dfrac{x^2}{2} + x + 2$

Định phương-trình của hyperbol.

Tìm phương-trình của hyperbol biết rằng :

11. 13. *Nó qua ba điểm* $A(-3 ; -1)$, $B(0 ; 5)$, $C(3 ; 3)$

11. 14. *Nó qua ba điểm* $M(1 ; -3)$, $P\left(-1 ; \dfrac{1}{3}\right)$, $Q\left(0 ; -\dfrac{1}{2}\right)$

11. 15. *Nó qua* $A(2 ; 0)$ *và có tâm đối-xứng là điểm* $I(3,5 ; 2)$.

11. 16. *Nó qua* $A(1 ; -2)$ *và có hai đường tiệm-cận là* $x = 2$, $y = 3$.

11. 17. *Nó tiệm-cận với đường thẳng* $x = 1$ *và tiếp-xúc với đường thẳng* $y = 3x + 1$ *tại điểm* $A(0 ; 1)$.

Tiếp-tuyến.

11. 18. *1. Cho hàm-số* $y = \dfrac{ax-b}{bx+1}$. *Định a và b biết rằng đường biểu-diễn qua điểm* $A\left(\dfrac{2}{3} ; 0\right)$ *và điểm* $B(1 ; 1)$. *Vẽ đường biểu-diễn (C) đó.*

2. Dùng đạo-hàm để tìm ra những điểm ở trên (C) tại đó độ dốc của tiếp-tuyến bằng $+4$. *Vẽ các tiếp-tuyến đó.*

1. Vẽ đường biểu-diễn (C) của hàm-số $y = \dfrac{x+1}{x+2}$

2. (C) cắt trục $y'Oy$ tại điểm B. Vẽ tiếp-tuyến tại B.

3 Viết phương-trình của tiếp-tuyến tại B.

11. 20. 1. Vẽ đường biểu-diễn (H) của hàm-số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

2. Tìm phương-trình của đường thẳng đi qua gốc tọa-độ O và có độ dốc m.

3. Định m để cho đường thẳng đó tiếp-xúc với (H).

11 21. Coi hàm-số $y = \dfrac{(3m+1)x+m+5}{(2m+1)x+m+1}$

1. Định m để hàm-số đó luôn luôn đồng-biến.

2. Định m để cho đường biểu-diễn của hàm-số đi qua A $(0 ; -3)$.

3. Vẽ đường biểu-diễn của hàm-số khi $m = 0$. Tìm phương-trình của tiếp-tuyến tại điểm mà đường biểu-diễn cắt trục y. Vẽ tiếp-tuyến đó.

11. 22. Coi hàm-số $y = \dfrac{(2m+1)x+5m+7}{x+m+3}$ (1)

1. Cho $m = 0$, vẽ đường biểu-diễn (H_1).

2. Cho $m = -3$, vẽ đường biểu-diễn (H_2).

3. Tính tọa-độ giao-điểm của (H_1) (H_2).

4 Tìm phương-trình của tiếp-tuyến của (H_1) tại mỗi giao-điểm.

5. Định m để cho hàm-số (1) luôn luôn nghịch-biến.

- **Parabol và hyperbol.**

11. 23. Coi các hàm-số sau :

$$y = f(x) = -2x^2 - x$$

$$y = g(x) = \frac{-x}{1+2x}$$

1. *Khảo-sát sự biến-thiên và vẽ đường biểu-diễn (P) và (H) của hai hàm-số trên trong cùng một đồ-thị.*

2. *Định tọa-độ giao-điểm của (P) và (H).*

3. *Viết phương-trình của các tiếp-tuyến tại các giao-điểm.*

11. 24. 1. *Trong cùng một đồ-thị, vẽ đường biểu-diễn của hai hàm-số sau :*

$$y = \frac{x^2}{2} - x - 1$$

$$y = \frac{x + 2}{x - 2}$$

2. *Tính tọa-độ giao-điểm.*

3. *Viết phương-trình của các tiếp-tuyến tại các giao-điểm.*

11. 25. 1. *Vẽ đường biểu-diễn H và P của hai hàm-số sau đây vào một đồ-thị chung*

$$y = \frac{2x}{x - 2} \qquad y = x^2 - x$$

2. *Chứng tỏ chúng có tiếp-tuyến chung tại O. Tìm giao-điểm thứ nhì của H và P.*

3. *Đặt $x = \cos\alpha$. Hãy giới-hạn các đường cong ở câu 1. Một đường tung $y = \cos\alpha$ cắt H ở M và cắt P ở N Tính $\overline{MN}$ theo $\cos\alpha$. Chứng tỏ $\overline{MN}$ không âm.*

Tính $\overline{MN}$ khi $\alpha = 0$, $\frac{\pi}{3}$ hay π.

11. 26. 1. *Trong một đồ-thị chung, vẽ đường biểu-diễn (H) và (P) của hai hàm-số :*

$$y = \frac{1}{2x} \qquad y = 4x^2$$

Tính tọa-độ giao-điểm A.

2. *Gọi gốc tọa-độ là O Đường thẳng OA lại cắt (H) ở một điểm thứ nhì B. Tọa-độ của B ?*

3. *Nối A với C (1 ; 0). Tìm phương-trình của đường thẳng AC. Chứng tỏ rằng AC tiếp-xúc với (H).*

4. *Tính tọa-độ giao-điểm (khác A) của đường AC và (P).*

● **Tính.chất của cát-tuyến.**

11. 27. 1. *Vẽ đường biểu-diễn (H) của hàm-số* $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$

2. *Tìm phương-trình của đường thẳng (D) đi qua điểm K (— 2 ; 2) và có độ dốc m.*

3. *Định m để (D) cắt (H) tại hai điểm M′, M″ khác nhau. Tính hoành-độ trung-điểm của đoạn M′M″ theo m.*

4. *(D) cắt hai đường tiệm-cận của (H) ở P, Q. Tính hoành-độ trung-điểm của đoạn PQ theo m. Kết-luận ?*

12. MỘT SỐ VẤN-ĐỀ THÔNG-DUNG

12. 1. TIẾP-TUYẾN PHÁT-XUẤT TỪ MỘT ĐIỂM.

Thí-dụ 1. Cho parabol (P) mà phương-trình là $y = x^2 + 2x$. Tìm phương-trình của những đường thẳng phát-xuất từ điểm A (— 2 ; — 4) và tiếp-xúc với (P).

Ta gọi (D) là đường thẳng đi qua A (— 2 ; — 4) và có độ dốc là *m*. Phương-trình của (D) là :

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y + 4 = m(x + 2)$$

$$y = mx + 2m - 4 = mx + 2(m - 2).$$

Phương-trình hoành-độ các giao-điểm của (P) và (D) là :

$$x^2 + 2x = mx + 2(m - 2)$$

$$x^2 - (m - 2)x - 2(m - 2) = 0 \qquad (1)$$

Điều-kiện ắt có và đủ để cho (D) và (P) tiếp-xúc với nhau là : phương-trình (1) có nghiệm-số kép.

Suy ra $\Delta = 0$

$$(m - 2)^2 + 8(m - 2) = 0$$

$$(m - 2)(m - 2 + 8) = 0$$

$$(m - 2)(m + 6) = 0$$

Phương-trình này cho $m' = 2$, $m'' = -6$.

Vậy qua A, có hai đường thẳng tiếp-xúc với (P), độ dốc lần-lượt là $m' = 2$, $m'' = -6$. Phương-trình là :

$$y = m'x + 2\ (m' - 2) = 2x$$

$$y = m''x + 2\ (m'' - 2) = -6x - 16.$$

Thí-dụ 2. Tính độ dốc của những đường thẳng phát-xuất từ điểm A (4 ; − 1) và tiếp-xúc với hyperbol $y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

Phương-trình của đường thẳng (D) đi qua A (4 ; − 1) và có độ dốc m là :

$$y - y_A = m\ (x - x_A)$$

$$y + 1 = m\ (x - 4)$$

$$y = mx - 4m - 1$$

Phương-trình hoành-độ các giao-điểm của (D) và hyperbol là :

$$mx - 4m - 1 = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

$$mx^2 - 4mx - x - mx + 4m + 1 = 2x + 1$$

$$mx^2 - 5mx - 3x + 4m = 0$$

$$mx^2 - (5m + 3)\,x + 4m = 0 \qquad (1)$$

Để cho (D) và hyperbol tiếp-xúc nhau, ta *phải có và chỉ cần có :* phương-trình (1) nhận nghiệm-số kép nghĩa là $\Delta = 0$.

$$(5m + 3)^2 - 4m \cdot 4m = 0$$

$$25m^2 + 30m + 9 - 16m^2 = 0 \quad \text{(có thể dùng } A^2 - B^2\text{)}$$

$$9m^2 + 30m + 9 = 0$$

$$3m^3 + 10m + 3 = 0$$

$$m = \frac{-5 \pm 4}{3} \quad \begin{cases} m' = -3 \\ m'' = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

12. 2. HỌ ĐƯỜNG CONG.

Thí-dụ 1. Chứng-minh rằng đường biểu-diễn của những hàm-số $y = x^2 - 2(m + 1)x + 3m - 1$ đi qua một điểm cố-định.

Hàm-số phụ-thuộc vào thông-số *m*. Mỗi trị-số của *m* ứng với một đường biểu-diễn tức là một parabol. Có rất nhiều trị-số của *m*, vậy có vô-số parabol.

Đó là một *họ parabol.* Ta hãy xét xem họ parabol đó đi qua điểm cố-định nào.

Đã gọi là một điểm cố-định thì tọa-độ của điểm ấy không phụ-thuộc vào *m*.

Ta hãy xếp thứ-tự đa-thức (1) theo *m*.

$$x^2 - 2mx - 2x + 3m - 1 - y = 0$$

$$(-2x + 3)m + (x^2 - 2x - 1 - y) = 0 \qquad (2)$$

Hệ-thức đó có dạng $\quad Am + B = 0$

m sẽ vô-định nếu ta có $\quad \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

Vì thế, muốn cho *m* vô-định, ta làm triệt-tiêu cùng một lúc các hệ-số A và B trong hệ-thức $Am + B = 0$, nghĩa là ta giải hệ-thống :

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

Ở đây, ta có hệ-thống :

$$\begin{cases} -2x + 3 = 0 \\ x^2 - 2x - 1 - y = 0 \end{cases}$$

Hệ-thống đó cho ta : $\quad x = \dfrac{3}{2}$ và $y = \dfrac{-7}{4}$

Cặp trị-số $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{-7}{4}$ làm cho hệ-thức (2) luôn luôn được thỏa, bất-chấp m là bao nhiêu.

Do đó, họ parabol đi qua điểm cố-định $\mathbf{A}\left(\mathbf{x} = \frac{3}{2}, \mathbf{y} = \frac{-7}{4}\right)$

Thí-dụ 2. **Chứng-minh rằng đường biểu-diễn của những hàm-số :**

$$\mathbf{y = (1 - 2m)\,x^2 - (3m - 1)\,x + 5m - 2 \left(m \neq \frac{1}{2}\right)} \qquad \mathbf{(1)}$$

đi qua hai điểm cố-định.

Xếp thứ-tự đa-thức (1) theo m thì có

$$x^2 - 2mx^2 - 3mx + x + 5m - 2 - y = 0$$

$$(-2x^2 - 3x + 5)\,m + (x^2 + x - 2 - y) = 0 \qquad (2)$$

Đó là một hệ-thức thuộc dạng $\quad Am + B = 0$

m sẽ vô-định nếu ta có $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

Ở đây, ta có hệ-thống :

$$\begin{cases} -2x^2 - 3x + 5 = 0 \\ x^2 + x - 2 - y = 0 \end{cases}$$

Phương-trình thứ nhất cho ta : $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{5}{2}$.

Đem những trị-số đó vào phương-trình thứ nhì, ta được :

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{7}{4}$$

Thử lại, ta thấy : khi $x = 1$ và $y = 0$, hay khi $y = \frac{-5}{2}$ và $x = \frac{7}{4}$ thì hệ-thức (2) được thỏa, bất-chấp m là bao nhiêu.

Vậy họ parabol định bởi phương-trình (1) đi qua hai điểm cố-định

$$\mathbf{A\ (1\ ;\ 0)} \quad \text{và} \quad \mathbf{B\left(\frac{-5}{2}\ ;\ \frac{7}{4}\right)}$$

Khi $m = \frac{1}{2}$ thì (1) trở thành $= -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$. Trong họ parabol, có một đường thẳng. Sau khi thử, ta thấy rằng đường đó cũng qua A và B.

Thí-dụ 3. **Chứng-minh rằng họ hyperbol sau này đi qua hai điểm cố-định :**

$$Y = \frac{5mx - (13m - 24)}{5x + (6m - 13)}$$

Khai-triển và xếp thứ-tự theo *m*, ta có

$$5xy + 6my - 13y = 5mx - 13m + 24$$

$$(6y - 5x + 13)\, m + (5xy - 13y - 24) = 0$$

m sẽ vô-định nếu ta có :

$$\begin{cases} 6y - 5x + 13 = 0 & (1) \\ 5xy - 13y - 24 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) cho $x = \frac{6y + 13}{5}$

Đem trị-số đó vào (2) :

$$5 . \frac{6y + 13}{5} . \; y - 13y - 24 = 0$$

$$(6y + 13)\, y - 13y - 24 = 0$$

$$6y^2 - 24 = 0 \qquad y^2 = 4 \qquad y = \pm 2$$

Khi $y = -2$ thì $x = \frac{1}{5}$

Khi $y = 2$ thì $x = 5$

Họ hyperbol đi qua hai điểm cố-định :

$$\mathbf{A}\left(\frac{1}{5} ; -2\right) \qquad \mathbf{B}\,(5 ; 2)$$

12. 3. QUỸ-TÍCH.

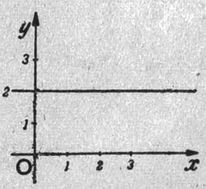
Ta coi một điểm I mà tọa-độ là x, y. Nói rằng I lưu-động có nghĩa là một trong hai số x, y hay là cả hai số phụ-thuộc vào một thông-số m.

Trường-hợp 1. y không phụ-thuộc vào thông-số m.

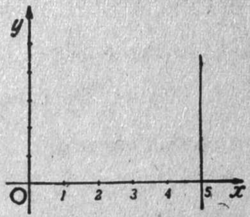
Thí-dụ ta có $I \begin{cases} x = 2m - 3 \\ y = 2 \end{cases}$

Quỹ-tích của I (khi m thay đổi) là đường thẳng mà phương-trình là $y = 2$.

Trường-hợp 2. x không phụ-thuộc vào thông-số m.



Hình 42



Hình 43

Thí-dụ ta có $I \begin{cases} x = 5 \\ y = m - 3 \end{cases}$

Quỹ-tích của I khi m thay đổi là đường thẳng mà phương-trình là $x = 5$.

Trường-hợp 3 : x và y cùng phụ-thuộc vào thông-số.

Coi một điểm I lưu-động, cả hai tọa-độ đều phụ-thuộc vào thông-số m.

$$\begin{cases} x = f\ (m) \\ y = g\ (m) \end{cases}$$

Khử m giữa hai hệ-thức đó thì được một hệ-thức giữa x và y độc-lập đối với m, mà ta có thể viết dưới dạng-thức :

$$y = h\ (x)$$

Đó là *phương-trình của quỹ-tích của I.*

Thí-dụ 1. Tìm quỹ-tích đỉnh S của parabol mà phương-trình là

$$y = mx^2 - (1 + 8m)\ x + 4\ (4m + 1).$$

Đây là một hàm-số bậc hai, (khi $m \neq 0$) ; các hệ-số là :

$$a = m \;;\; b = -(8m + 1) \;;\; c = 4\,(4m + 1)$$

Tọa-độ của đỉnh S của parabol là :

$$S \begin{cases} x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{8m + 1}{2m} & (1) \\ y = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = -\dfrac{1}{4m} & (2) \end{cases}$$

(1) cho $2mx = 8m + 1$ do đó $m = \dfrac{1}{2\,(x - 4)}$ $(x \neq 4)$

Đem trị-số đó của m vào (2) thì được :

$$y = -\frac{x}{2} + 2.$$

Đó là một hàm-số bậc nhất. *Quỹ-tích của S là đường thẳng mà phương-trình là* $y = -\dfrac{x}{2} + 2.$

Chú-thích. Nhìn hệ-thức $m = \dfrac{1}{2\,(x - 4)}$ thì biết rằng m không được xác-định khi $x = 4$. Ta kết-luận rằng : trên đường thẳng quỹ-tích của S, mà phương-trình là $y = -\dfrac{x}{2} + 2$, có một điểm không dùng làm đỉnh parabol được. Đó là điểm mà hoành-độ là $x = 4$, tung-độ là $y = 0$.

Thí-dụ 2. Tìm quỹ-tích tâm đối-xứng I của hyperbol mà phương-trình là

$$Y = \frac{(2m + 1)\,x - 3}{mx + 2}$$

Ta có

$$I \begin{cases} x = \dfrac{d}{c} = -\dfrac{2}{m} \\ y = \dfrac{a}{c} = \dfrac{2m + 1}{m} = 2 + \dfrac{1}{m} \end{cases}$$

Suy ra $$\begin{cases} x = -\dfrac{2}{m} \\ 2y = 4 + \dfrac{2}{m} \end{cases}$$

Cộng vế ta được $$x + 2y = 4$$

Do đó $$y = -\frac{x}{2} + 2$$

Quỹ-tích của điểm I là đường thẳng mà phương-trình là

$$y = -\frac{x}{2} + 2$$

Thí-dụ 3. Cho parabol P phương-trình $y = \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 5)$. Một đường thẳng D quay quanh điểm cố-định A (1, – 2). Khi D cắt P tại hai điểm M′, M″, tìm quỹ-tích trung-điểm của đoạn M′M″.

Đường D quay quanh điểm A (1, — 2).

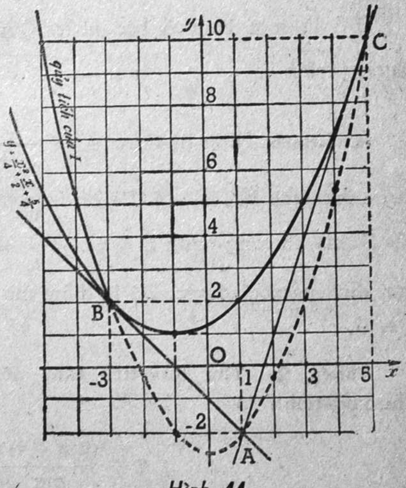
Ta gọi độ dốc của nó là m; m là thông-số trong bài toán này. Phương-trình của D là:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$
$$y + 2 = m(x - 1)$$

Suy ra $y = mx - (m + 2)$

Đó là một họ đường thẳng D, chúng làm thành một *chùm đường thẳng đồng-quy* tại A.

(**Lời dặn :** Nếu một họ đường thẳng có độ dốc bằng nhau thì chúng làm thành một *chùm đường thẳng song-song*).



Hình 44

Tọa-độ giao-điểm, nếu có, của D và P là nghiệm-số của hệ-thống :

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{4}(x^2 + 2x + 5) & (1) \\ y = mx - (m + 2) & (2) \end{cases}$$

Khử y giữa hai phương-trình đó, ta có *phương-trình hoành-độ* :

$$\frac{1}{4}(x^2+2x+5) = mx - (m+2) \qquad (2)$$

Khai-triển và rút gọn ta có :

$$x^2 + 2(1-2m)x + 13 + 4m = 0 \qquad (3)$$

Phương-trình (3) này chỉ có nghiệm-số khi $\Delta' \geqslant 0$ nghĩa là khi

$$(1-2m)^2 - (13+4m) \geqslant 0$$

$$4m^2 - 8m - 12 \geqslant 0$$

$$m^2 - 2m - 3 \geqslant 0$$

Tam-thức ở vế thứ nhất có hai nghiệm-số là -1 và 3.

Vậy ta phải chọn $\mathbf{m \leqslant -1}$ hoặc chọn $\mathbf{m \geqslant 3}$.

Với điều-kiện đó, P và D có hai điểm chung M', M'' (phân-biệt hay trùng nhau).

Nghiệm-số x', x'' của (3) là hoành-độ của M', M''.

Gọi I là trung-điểm của đoạn M'M''. Hoành-độ của I là :

$$x = \frac{x'+x''}{2} = \frac{S}{2} = 2m - 1 \qquad (4)$$

Tung-độ của I (I nằm trên D) là :

$$y = mx - (m+2) \qquad (5)$$

Để tìm phương-trình của quỹ-tích của I, ta khử m giữa x và y.

(4) cho $$m = \frac{x+1}{2} \qquad (6)$$

Thế m vào (5), ta có

$$y = \frac{x+1}{2}x - \left(\frac{x+1}{2} + 2\right)$$

Suy ra $$\mathbf{y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}}$$

Điều này tỏ rằng I *nằm trên* parabol (π) mà phương-trình là

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}$$

Giới-hạn.

Ta đã biết : $m \leqq -1$ hoặc $m \geqslant 3$

Thế mà $m = \dfrac{x+1}{3}$; do đó

$$\alpha)\quad \frac{x+1}{2} \leqq -1,\ x+1 \leqq -2,\ x \leqq -3$$

$$\beta)\quad \frac{x+1}{2} \geqslant 3,\quad x+1 \geqslant 6,\quad x \geqslant 5$$

Vậy *quỹ-tích của I* là parabol (π) *bớt đi* cung ứng với $-3 \leqq x \leqq 5$

Hai điểm giới-hạn là $x = -3$, $y = 2$ (điểm B)

và $x = 5$, $y = 10$ (điểm C)

12. 4. GÓC CỦA HAI ĐƯỜNG CONG..

Trong mặt phẳng ta coi hai đường cong cắt nhau ở M. Theo định-nghĩa, *góc của hai đường cong tại M là góc của tiếp-tuyến của chúng tại điểm đó.*

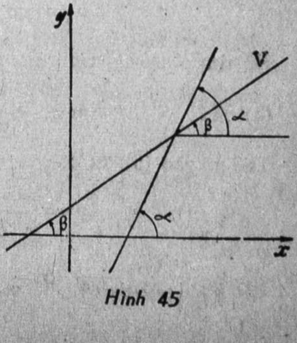
Hai tiếp-tuyến tại điểm chung có độ dốc là m và m' (dùng đạo-hàm thì tính được m và m').

Đường thứ nhất tạo với trục x một góc α. Đường thứ nhì tạo với trục x một góc β. Ta có $\begin{cases} \text{tg}\ \alpha = m \\ \text{tg}\ \beta = m' \end{cases}$

Góc của hai đường cong là

$$V = \alpha - \beta$$

Suy ra $\quad \text{tg}\ V = \text{tg}\ (\alpha - \beta)$



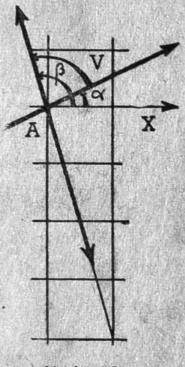
Hình 45

Dùng công-thức $\quad \mathrm{tg}\,(a - b) = \dfrac{\mathrm{tg}\,a - \mathrm{tg}\,b}{1 + \mathrm{tg}\,a \,.\, \mathrm{tg}\,b}$

ta có $\quad \mathrm{tg}\,V = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha \,.\, \mathrm{tg}\,\beta}$

$$\boxed{\mathrm{tg}\,V = \frac{m - m'}{1 + m\ m'}}$$

Nên $V = 90^0$ thì ta nói rằng hai đường cong *trực-giao* với nhau.



Hình 46

Trong thực-hành, người ta thường lấy góc *nhọn*, nên công-thức là

$$\mathrm{tg}\,V = \left| \frac{m - m'}{1 + m\,m'} \right|$$

Thí-dụ. Cho hai đường cong

$$y = x^2 + 2x$$

$$y = \frac{2x}{x + 1}$$

Nghiệm lại rằng chúng có điềm chung A (— 3 ; 3). Tính tang của góc của chúng tại A.

$$y = x^2 + 2x. \quad \text{Khi} \quad x = -3 \quad \text{thì} \quad y = 3$$

$$y = \frac{2x}{x + 1}. \quad \text{Khi} \quad x = -3 \quad \text{thì} \quad y = 3$$

Vậy parabol (P) (phương-trình là $y = x^2 + 2x$)

và hyperbol (H) $\left(\text{phương-trình là } x = \dfrac{2x}{x + 1}\right)$ có điềm chung A (— 3 ; 3)

$$y = x^2 + 2x \quad \Rightarrow \quad y' = 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad y'_A = -4$$

$$y = \frac{2x}{x + 1} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2}{(x + 1)^2} \quad \Rightarrow \quad x'_A = \frac{1}{2}$$

Kẻ AX song-song cùng chiều với trục $x'x$.

Tiếp-tuyến của (P) tại A nghiêng với AX một góc α, với $\operatorname{tg} \alpha = y'_A = -4$.

Tiếp-tuyến của (H) tại A nghiêng với AX một góc β, với $\operatorname{tg} \beta = y'_A = \frac{1}{2}$

Góc V của hai đường cong tại A là

$$V = \alpha - \beta$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg} V = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta}$$

$$= \frac{-4 - \frac{1}{2}}{1 + (-4)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{9}{2}$$

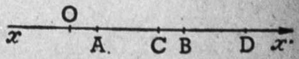
12. 5. HÀNG ĐIỂM ĐIỀU-HÒA.

1. **Định-nghĩa. Bốn điểm A, B, C, D ở trên trục làm thành một hàng điểm điều-hòa khi :**

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \qquad (1)$$

hay $$\overline{CA}\,.\,\overline{DB} + \overline{DA}\,.\,\overline{CB} = 0 \qquad (1')$$

Hai điểm A, B gọi là *liên-hiệp* đối với hai điểm C, D và ngược lại.



Hình 47

Cho A, B cố-định. Giả-sử C tiến tới A, như thế $\overline{CA}$ tiến tới zêrô. Hệ-thức (1) tỏ rằng $\overline{DA}$ cũng tiến tới zêrô nghĩa là : khi C tiến tới A thì D cũng tiến tới A. Tương-tự khi C tiến tới B thì D cũng tiến tới B.

2. **Hệ-thức. Gọi hoành-độ của ABCD đối với gốc O là a, b, c, d.**

Ta có :

$$\overline{CA} = a - c, \ \overline{CB} = b - c, \ \overline{DA} = a - d, \ \overline{DB} = b - d.$$

Hệ-thức (1′) thành ra :

$$(a - c)(b - d) + (a - d)(b - c) = 0$$

Khai-triển và rút gọn ta có :

$$\mathbf{2\,(ab + cd) = (a + b)\,(c + d)} \qquad (2)$$

Đó là *hệ-thức điều-hòa.*

Nếu gốc O ở A, ta có $a = 0$, hệ-thức (2) thành ra $2cd = bc + bd$. Chia hai vế cho tích-số bcd, ta có :

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

hay

$$\mathbf{\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{\overline{AD}}} \qquad (3)$$

Đó là *hệ-thức Descartes.*

Nếu gốc O ở trung-điểm I của AB ta có $\overline{IA} = -\overline{IB}$ hay $a = -b$. Hệ-thức (2) thành ra :

$$2\,(-a^2 + cd) = 0$$

$$a^2 = cd$$

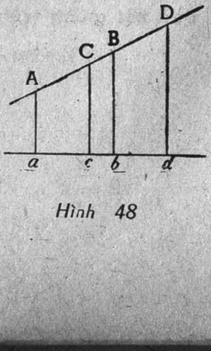
tức

$$\mathbf{IA^2 = IB^2 = \overline{IC}\,.\,\overline{ID}} \qquad (4)$$

Đó là *hệ-thức Newton.*

Muốn chứng-minh rằng 4 điểm A,B,C,D làm thành một hàng điểm điều-hòa thì ta dùng định-nghĩa (hệ-thức 1) hay chứng-minh rằng hoành-độ của chúng thỏa cho một trong ba hệ-thức trên.

Nên nhớ rằng khi ABCD làm thành một hàng điểm điều-hòa thì hình chiếu của chúng xuống một đường thẳng cũng làm thành một hàng điểm điều-hòa.



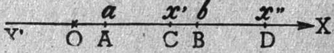
Hình 48

12. 6. THÍ-DỤ.

1. **Coi phương-trình $mx^2 + (2m - 1)x + m - 2 = 0$ với $m \neq 0$. Khi phương-trình có nghiệm-số, ta lấy trên trục X′OX hai điểm C, D sao cho $\overline{OC} = x'$, $\overline{OD} = x''$. Chứng tỏ rằng C, D liên-hợp với hai điểm cố-định A, B.**

Giai-đoạn 1 : Tính S và P theo m và khử m giữa S và P.

$$\begin{cases} S = x' + x'' = -\dfrac{2m-1}{m} = \dfrac{1-2m}{m} = \dfrac{1}{m} - 2 \\ P = x' \,.\, x'' = \dfrac{m-2}{m} = 1 - \dfrac{2}{m} \end{cases}$$



Hình 49

$$\begin{cases} 2S = \dfrac{2}{m} - 4 \\ P = 1 - \dfrac{2}{m} \end{cases}$$

Suy ra $P + 2S = -3$

tức là $\mathbf{x'x'' + 2(x' + x'') + 3 = 0}$

Giai-đoạn 2 : Cho x′ = x′ = X rồi giải phương-trình trên đây. Nghiệm-số, nếu có, sẽ là hoành-độ của A và B.

$$x'x'' + 2(x' + x'') + 3 = 0$$

$$X^2 + 4X + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad X' = -1,\ X'' = 3$$

$$\overline{OA} = -1 \quad \overline{OB} = 3.$$

2. **Đầu bài giống trên, nhưng ta dùng phương-trình**

$$x^2 - (m + 2)x + 3m + 6 = 0$$

$$S = x' + x'' = -\frac{b}{a} = m + 2$$

$$P = x' \,.\, x'' = \frac{c}{a} = 3m + 6 = 3(m + 2)$$

Ta nhận thấy ngay rằng : $\frac{S}{P} = \frac{1}{3}$

$$\frac{x' + x''}{x'x''} = \frac{1}{3} \quad \text{tức là} \quad \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{2}{6}$$

hay $$\frac{1}{\overline{OC}} + \frac{1}{\overline{OD}} = \frac{2}{\overline{OB}} \qquad (\overline{OB} = 6)$$

Hệ-thức Descartes này tỏ rằng C, D liên-hiệp với hai điểm O và B (ở đây, A chính là gốc O).

Hoành-độ của B là 6. Hoành-độ của A là 0.

3. Đầu bài giống trên nhưng ta dùng phương-trình

$$(m + 1)\, x^2 - 3\,(m - 2)\, x + 4\,(m + 1) = 0$$

Ta hãy tìm hệ-thức giữa hai nghiệm-số độc-lập đối với *m*.

Ta có ngay $P = x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{4(m+1)}{m+1} = 4$ (khi $m \neq -1$)

Gọi O là gốc hoành-độ, ta có :

$$\overline{OC} = x' \; ; \; \overline{OD} = x''$$

Vì $$x'x'' = 4 = (\pm 2)^2$$

nên $$\overline{OC} \,.\, \overline{OD} = (\pm 2)^2 = OA^2 = OB^2$$

Hệ-thức Newton đó tỏ rằng C và D liên-hiệp với hai điểm cố-định A và B mà hoành-độ là ± 2.

Tóm lại, khi ta gặp hệ-thức :

— *thuộc loại* $\alpha\, x'x'' + \beta\,(x' + x') + \gamma = 0$, *ta dùng phương-pháp trình-bày trong những thí-dụ 1.*

— *thuộc loại* $\alpha\, x'x'' + \beta\,(x' + x'') = 0$, *ta dùng hệ-thức Descartes như đã trình-bày trong thí-dụ 2.*

— *thuộc loại* $x' \,.\, x'' =$ *hằng-số dương, ta dùng hệ-thức Newton như đã trình-bày trong thí-dụ 3.*

BÀI TẬP

- **Tìm phương-trình của tiếp-tuyến phát-xuất từ một điểm A cho sẵn đối với một parabol cho sẵn hay một hyperbol cho sẵn :**

12. 1. $A\,(2\,;\,4)$ $\quad y = \frac{1}{2}x^2 - x + 5$

12. 2. $A\,(+1\,;\,-1)$ $\quad y = (x+1)^2$

12. 3. $A\,(+4\,;\,-4)$ $\quad y = \frac{2}{x}$

12. 4. $A\,(0\,;\,4)$ $\quad y = \frac{2x-1}{x-3}$

- **Xét xem những họ đường cong sau này đi qua điểm cố-định nào :**

12. 5. $y = (m+1)\,x^2 - 2\,(m+2)\,x + 2m.$

12. 6. $y = mx^2 - 2\,(m-2)\,x + m - 3.$

12. 7. $y = mx^2 - 3\,(m+2)\,x + m + 16.$

12. 8. $y = mx^2 - (2m-1)\,x + m.$

12. 9. $y = (1-2m)\,x^2 - (3m-1)\,x + 5m - 2.$

12. 10. $y = mx^2 - 2x - (m-2).$

12. 11. $y = \frac{(2m+1)\,x + 5m + 7}{x + m + 3}$

12. 12. $y = \frac{mx+2}{x+m-1}$

12. 13. $y = \frac{(4m+2)\,x + 8m - 8}{(9-6m)\,x - 6}$

- **Quỹ-tích của đỉnh parabol.**

Tìm quỹ-tích của đỉnh S của những parabol sau này :

12. 14. $y = (m-2)\,x^2 - 2\,(m+3)\,x - 5m.$

12. 15. $y = mx^2 - (4m-3)\,x + 4m + 3.$

12. 16. $y = mx^2 - (2m-1)\,x + m.$

● Quỹ-tích của tâm hyperbol.

Tìm quỹ-tích của tâm I của những hyperbol sau đây :

12. 17. $y = \dfrac{(m+1)x+2}{mx-3}$ **12. 18.** $y = \dfrac{x+m+3}{(m+1)x-m}$

12. 19. $y = \dfrac{(2m-1)x+1}{-mx+m-2}$ **12. 20.** $y = \dfrac{3mx+2m-1}{x+2m-3}$

● Quỹ-tích trung-điểm của một dây cung.

12. 21. *Vẽ đường biểu-diễn P của hàm-số* $y = -x^2 + x + 2$.

Biện-luận sự tương-giao của P với đường thẳng D mà phương-trình là $y = 2x + m$; *m là một thông-số. Trong trường-hợp có hai giao-điểm A, B, tìm quỹ-tích của trung-điểm I của đoạn AB khi m thay đổi. Vẽ quỹ-tích đó.*

12. 22. *Vẽ đường biểu-diễn P của hàm-số* $y = x^2 - 2x + 2$.

Coi những đường thẳng D mà phương-trình là $y = m(x-1) + 2$. *Đường D có qua điểm cố-định nào không? Biện-luận sự tương-giao của D với P. Tìm quỹ-tích trung-điểm I của đoạn AB, khi D cắt P ở hai điểm A, B; vẽ quỹ-tích đó.*

⑤ **12. 23.** *Vẽ đường biểu-diễn P của hàm-số* $y = -x^2 - 2x + 3$.

Qua điểm gốc tọa-độ, có một đường thẳng D mà độ dốc là m. Biện-luận sự tương-giao của D và P. Tìm quỹ-tích trung-điểm I của đoạn AB, A và B là giao-điểm D và P. Vẽ quỹ-tích đó.

12. 24. *Cho parabol* $y = x^2 - 4x + 3$. *Từ điểm* $P\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$ *có một đường thẳng độ dốc là m. Tìm phương-trình của đường đó. Biện-luận sự tương-giao của đường thẳng đó với parabol. Trường-hợp tiếp-xúc. Từ P, có thể kẻ mấy tiếp-tuyến cho parabol? Quỹ-tích trung-điểm của đoạn nối giao-điểm.*

● Góc của hai đường cong. Góc của một đường cong với một đường thẳng.

12. 25. *Vẽ đường biểu-diễn P của hàm-số* $y = x^2 - 2x$. *Nó cắt trục x tại một điểm A khác gốc tọa-độ. Tìm độ dốc của tiếp-tuyến tại A. Suy ra tang của góc* α *hợp bởi trục và parabol tại điểm A.*

12. 26. *Vẽ hai parabol* $y = x^2 - 2x + 2$ *và* $y = 2x^2 - 5x + 4$. *Tính tọa-độ giao-điểm. Tính tang của góc của hai parabol tại giao-điểm.*

12. 27. *Vẽ hai parabol* $y = x^2 - 4x + 5$ *và* $y = -x^2 + 6x - 3$. *Tính tọa-độ giao-điểm. Tính* $\operatorname{tg}\alpha$, α *là góc nhọn của hai parabol tại giao-điểm.*

- **Hàng-điểm điều-hòa.**

Trên một trục $x'Ox$, *lấy hai điểm* M' *và* M'' *với* $\overline{OM'} = x'$; $\overline{OM''} = x''$. x' *và* x'' *là hai nghiệm-số của các phương-trình sau đây. Chứng-minh rằng* M' *và* M'' *liên-hiệp điều-hòa với 2 cố-định mà ta cần định rõ :*

12. 28. $(m - 1)x^2 - (2m - 1)x + m + 1 = 0$

12. 29. $(m - 2)x^2 + 4x + 9(m - 2) = 0$

12. 30. $2mx^2 - (m + 1)x + 3(m + 1) = 0$

12. 31. $3x^2 - (2m + 5)x + 3(2m - 3) = 0$

12. 32. $x^2 + (3m + 2)x + 2 = 0$

12. 33. $x^2 - (2m + 1)x + 2(2m + 1) = 0$

12. 34. $mx^2 + 6x + 2m + 3 = 0$

12. 35. $x^2 + (2m - 3)x - 2(m - 6) = 0$

12. 36. $(m + 1)x^2 + 2\left(m + \frac{5}{4}\right)x + m = 0$

BÀI TOÁN HỌC ÔN

1. ● Góc của hai parabol. Quỹ-tích đỉnh. Hàng điểm điều-hòa.

Cho hàm-số $y = x^2 + 2\ (m - 1)x + m + 1$ trong đó m là một thông-số.

1. Với trị-số nào của m, đường biểu-diễn (C) của hàm-số này cắt trục x ?

Hãy nghiệm lại rằng trong trường-hợp đường biểu-diễn (C) cắt trục x, những giao-điểm M′ và M″ liên-hiệp điều-hòa với hai điểm cố-định A và B có hoành-độ là -2 và $+1$.

2. Vẽ những đường cong (C) tương-ứng với những trị-số của $m = 0$; $m = 3$ trong một đồ-thị chung. Tính tọa-độ giao-điểm.

Tính tang của góc nhọn của hai đường cong ở giao-điểm.

3. Tìm quỹ-tích của đỉnh S của đường cong.

2. ● Họ parabol. Hàng điểm điều-hòa.

Cho hàm-số theo x :

$$y = -x^2 + 2\,(m + 1)\,x + m - 5 \quad (m \text{ là thông-số})$$

1. Vẽ trên cùng một đồ-thị những đường cong (C_0) và (C_2) tương-ứng với những trị-số $m = 0$ và $m = 2$ của thông-số m.

2. Chứng-minh rằng khi m thay đổi, những đường biểu-diễn (Cm) của hàm-số y đi qua một điểm cố-định I.

3. Với trị-số nào của m thì đường cong (Cm) cắt trục $x'Ox$ tại hai điểm M′ và M″ ?

4. Chứng-minh rằng, khi m thay đổi, những điểm M′, M″ liên-hợp điều-hòa với hai điểm cố-định A và B.

3. ● Họ parabol. Hàng điểm điều-hòa.

Coi hàm-số $y = f\,(x) = mx^2 + (1 - 3m)\,x + 2m$.

1. Chứng tỏ rằng các đường biểu-diễn đi qua hai điểm cố-định A, B. Tọa-độ của A, B ?

2. Phải chọn m ra sao để cho đường biểu-diễn của hàm-số cắt trục x tại hai điểm M', M'' khác nhau ? Chứng tỏ rằng M', M''. liên-hợp với hai điểm cố-định I, J. Hoành-độ của I, J trên trục x?

3. Định m để đường biểu-diễn của hàm-số là một parabol mà hoành-độ của đỉnh là $x = 1$. Vẽ parabol đó.

— 4. ● Tiếp-tuyến của parabol.

Coi họ parabol (C) mà phương-trình là $y = mx^2 - 3x + \frac{1}{m}$ (m là một thông-số khác zêrô).

1. Vẽ đường biểu-diễn trong hai trường-hợp riêng $m = 1$, $m = -\frac{1}{2}$.

2. Tính tọa-độ của điểm P nằm trên (C) sao cho tiếp-tuyến tại P có độ dốc bằng 1.

3. Coi đường thẳng phát-xuất từ gốc O, phương-trình là $y = ax$. Tính a sao cho đường thẳng đó tiếp-xúc với (C).

5. ● Họ hyperbol. Quỹ-tích.

Cho hàm-số $y = \dfrac{mx + m + 2}{-mx + m + 1}$

Gọi đường biểu-diễn là (Hm).

1. Chứng tỏ rằng họ (Hm) đi qua một điểm cố-định.

2. Quỹ-tích tâm đối-xứng của (Hm).

3. Coi đường thẳng (D) mà phương-trình là $y = 2x$. Phải chọn m thế nào để cho (D) cắt (Hm) ở hai điểm P, Q khác nhau ? P, Q có liên-hợp với hai điểm cố-định nào không ?

6. ● **Hyperbol. Đường thẳng lưu-động. Quỹ-tích.**

1. Vẽ đường biểu-diễn (H) của hàm-số

$$y = \frac{2x - 1}{x - 1}$$

2. Chứng tỏ rằng họ đường thẳng (D) mà phương-trình là $y = mx - 3m + \frac{5}{2}$ đi qua một điểm cố-định A. Thử lại rằng A nằm trên (H).

3. (D) lại cắt (H) ở một điểm thứ nhì nữa là B. Theo *m*, tính tọa-độ trung-điểm I của đoạn AB. Quỹ-tích của I ?

7. ● **Họ hyperbol đi qua hai điểm cố-định.**

Cho hàm-số $y = \frac{mx + 2}{m + x - 1}$. Gọi đường biểu-diễn là (C*m*).

1. Vẽ đường cong (C_3) ứng với $m = 3$. Định những điểm trên (C_3) sao cho tiếp-tuyến ở những điểm đó có độ dốc là 4.

2. Quỹ-tích tâm đối-xứng của (C*m*).

3. Chứng tỏ (C*m*) qua hai điểm cố-định A, B. Tính theo *m* độ dốc của tiếp-tuyến của (C*m*) tại A và B.

8. ● **Parabol. Hyperbol. Cát-tuyến.**

1. Trong một hệ trục trực-chuẩn vẽ đường biểu-diễn (P) và (H) của hai hàm-số :

$$y = -x^2 + 2x - 1$$

$$y = -\frac{2}{x}$$

Nghiệm lại rằng (P) và (H) có một giao-điểm là A (2 , — 1).

2. Chứng tỏ rằng : tại A, tiếp-tuyến của (P) và (H) thẳng góc với nhau.

3. Đường thẳng (D) có phương-trình $y = \frac{1}{2}x + m$. Giả-sử nó cắt (H) ở R, S và cắt hai trục ở U.V. Chứng tỏ rằng R S và U V có trung-điểm chung.

9. ● Phương-trình của parabol. Tiếp-tuyến.

1. Cho hàm-số $y = ax^2 + bx + 3$. Tính a và b để cho y có cực-đại bằng 4 khi $x = 1$. Vẽ đường biểu-diễn (P) của hàm-số trong trường-hợp đó.

2. Viết phương-trình của đường thẳng (D) đi qua điểm $A\left(0 ; \frac{17}{4}\right)$ và có độ dốc bằng m.

3. Định m để (D) tiếp-xúc với (P). Qua A, có mấy đường (D) tiếp-xúc với P ? Các đường (D) đó có thẳng góc với nhau không ?

10. ● Hyperbol. Quỹ-tích.

1. Hãy vẽ đường cong (H) biểu-diễn hàm-số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Gọi I là tâm đối-xứng của nó.

2. Tính độ dốc của tiếp-tuyến của (H) tại điểm A mà hoành-độ bằng 2. Tìm tiếp-tuyến thứ nhì của (H) có cùng một độ dốc. A′ là tiếp-điểm của tiếp-tuyến thứ nhì đó, hỏi ba điểm A, I, A′ được xếp đặt như thế nào ?

3. Tìm trị-số của thông-số m để cho đường thẳng D có phương-trình $y = -2x + m$ và (H) cắt nhau tại hai điểm M, M′ phân-biệt hay trùng nhau.

4. Khi m thỏa cho điều-kiện đã tìm thấy, hãy tính theo m tọa-độ trung-điểm J của M M′. Tìm một hệ-thức độc-lập đối với m giữa những tọa-độ đó. Chứng-minh rằng J ở trên một đường thẳng cố-định và định rõ quỹ-tích của J khi m thay đổi.

11. ● Họ hyperbol. Tiếp-tuyến.

Ta xét trong một hệ-thống trục trực-chuẩn $x'Ox$, $y'Oy$ những đường cong (H*m*) có phương-trình là $y = \frac{mx}{mx-1}$ trong đó m là một thông-số khác 0.

1. Định chiều biến-thiên của y khi m dương và khi m âm.

2. Chứng-minh rằng những đường cong (H*m*) có một đường tiệm-cận chung và một điểm chung.

3. Xét đường thẳng có phương-trình $y = ax$. Hãy định hằng-số a theo m sao cho đường thẳng này cắt (H*m*) tại hai điểm trùng nhau tại O. Suy ra phương-trình của tiếp-tuyến tại gốc với các đường cong

$$y = \frac{x}{x-1} \; ; \; y = \frac{x}{x+1}$$

12. ● Họ parabol. Cát-tuyến.

Coi họ parabol (C*m*) mà phương-trình phụ-thuộc vào thông-số m:

$$y = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$$

1. Vẽ parabol (C_1) ứng với $m = 1$. Tìm phương-trình của đường thẳng (D) tiếp-xúc với (C_1) và có độ dốc bằng 1.

2. Tìm quỹ-tích đỉnh S của (C*m*).

3. Chứng tỏ rằng (D) tiếp-xúc với (C*m*).

4. Chứng tỏ rằng đường thẳng (Δ) phương-trình $y = x$ cắt (C*m*) tại hai điểm A, B mà khoảng cách không thay đổi.

BÀI TOÁN HỌC ÔN CÓ GIẢI

1. Cho phương-trình

$$x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0 \qquad (1)$$

1. Khảo-sát sự khả-hữu và dấu các nghiệm-số x', x''.

2. Định m sao cho $x'^2 + x''^2 = x'x'' + 1$.

3. Định m sao cho $2x' - 3x'' = 1$.

4. Tìm một hệ-thức giữa hai nghiệm-số độc-lập đối với m. Nhờ đó suy ra những nghiệm-số kép của phương-trình (1).

5. Định m sao cho $-2 < x' < 1 < x''$.

BÀI GIẢI

1. Ta có : $\Delta' = m^2 - 3m + 2 = (m - 1)(m - 2)$

$$x' + x'' = S = 2m$$

$$x' \cdot x'' = P = 3m - 2$$

Ta xét dấu của Δ', của P và của S, rồi suy ra các thành-tích kê trong bảng sau đây :

m	Δ'	P	S	KẾT-QUẢ
$+\infty$				
	+	+	+	$0 < x' < x''$
2	−0−			$x' = x'' = 2$
	−	+	+	vô-nghiệm
1	−0−			$x' = x'' = 1$
	+	+	+	$0 < x' < x''$
$\frac{2}{3}$		−0−		$x' = -\sqrt{2}$, $x'' = +\sqrt{2}$
	+	−	+	$x' < 0 < x''$ $\lvert x'' \rvert > \lvert x' \rvert$
0			−0−	$x' = 0$, $x'' = \frac{4}{3}$
	+	−	−	$x' < 0 < x''$ $\lvert x' \rvert > \lvert x'' \rvert$
$-\infty$				

2. $$x'^2 + x''^2 = x'x'' + 1$$

$$S^2 - 2P = P + 1$$

$$S^2 - 3P - 1 = 0$$

$$4m^2 - 3(3m - 2) - 1 = 0$$

$$4m^2 - 9m + 5 = 0 \left\{ \begin{array}{l} m' = 1 \\ m'' = \dfrac{5}{4} \end{array} \right.$$

Nhìn vào cột xét dấu của Δ', ta chỉ nhận được trị-số $m = 1$ mà thôi.

3. $$\left\{ \begin{array}{ll} x' + x'' = 2m & (1) \\ x' \,.\, x'' = 3m - 2 & (2) \\ 2x' - 3x'' = 1 & (3) \end{array} \right.$$

Ta coi (1) và (3) :

$$-\left\{ \begin{array}{l} 2x' + 2x'' = 4m \\ 2x' - 3x'' = 1 \end{array} \right.$$

$$5x'' = 4m - 1$$

$$x'' = \frac{4m - 1}{5}$$

Suy ra $x' = 2m - x'' = 2m - \dfrac{4m - 1}{5} = \dfrac{6m + 1}{5}$

Đem trị-số của x', x'' vào (2) ta có :

$$\left(\frac{4m - 1}{5}\right)\left(\frac{6m + 1}{5}\right) = 3m - 2$$

$$(4m - 1)\ (6m + 1) = 25\ (3m - 2)$$

$$24m^2 - 2m - 1 = 75m - 50$$

$$24m^2 - 77m + 49 = 0$$

Biệt-số là $77^2 - 4 \times 24 \times 49 = 5929 - 4704$

$$= 1225 = 35^2$$

$$m = \frac{77 \pm 35}{48} \left\{ \begin{array}{l} m' = \dfrac{7}{3} \\[2ex] m'' = \dfrac{7}{8} \end{array} \right.$$

4. $\begin{cases} S = 2m \\ P = 3m - 2 \end{cases}$ $\qquad\qquad$ $\begin{cases} 3S = 6m \\ 2P = 6m - 4 \end{cases}$

Trừ vế ta được $\qquad 3S - 2P = 4$

$$2P - 3S + 4 = 0$$

$$\mathbf{2x' x'' - 3 (x' + x'') + 4 = 0}$$

Đặt $x' = x'' = X$, ta được

$$2X^2 - 3\,(2X) + 4 = 0$$

$$2X^2 - 6X + 4 = 0$$

$$X^2 - 3X + 2 = 0$$

$$\mathbf{X_1 = 1 \quad , \quad X_2 = 2}$$

Những nghiệm-số kép là $\qquad x' = x'' = 1$

$$x' = x'' = 2$$

Nhìn bảng biện-luận ở câu 1, ta thấy phù-hợp với câu này.

5. Ta phải định m sao cho

$$-2 < x' < 1 < x''$$

Ta đặt các điều-kiện ắt có và đủ :

$$\begin{cases} a \cdot f\,(1) < 0 \\ a \cdot f\,(-2) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 2m + 3m - 2 < 0 \\ 4 + 4m + 3m - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m - 1 < 0 \\ 7m + 2 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m < 1 \\ m > -\dfrac{2}{7} \end{cases}$$

Tóm lại :

$$-\frac{2}{7} < m < 1$$

2. Cho phương-trình

$$(m + 1)x^2 - 2mx + 3m - 1 = 0$$

1. Định m để phương-trình đó có hai nghiệm-số bằng nhau hoặc phân-biệt.

2. Định m để cho $x' < -2 < x''$.

3. Định m để cho $x'^2 + x''^2 = 2$

4. Tìm một hệ-thức giữa x', x'' độc-lập đối với m.

5. Viết một phương-trình bậc hai với ẩn-số là y sao cho

$$y' = 2x' - 1$$
$$y'' = 2x'' - 1$$

BÀI GIẢI

1. $a = m + 1$, $b = -2m$, $c = 3m - 1$.

Giả-sử $m + 1 \neq 0$ tức là $m \neq -1$

Để cho phương-trình có hai nghiệm-số bằng nhau hoặc phân-biệt, ta phải có và chỉ cần có $\Delta' \geqslant 0$.

$$m^2 - (3m - 1)(m + 1) \geqslant 0$$
$$m^2 - (3m^2 + 2m - 1) \geqslant 0$$
$$-2m^2 - 2m + 1 \geqslant 0$$
$$2m^2 + 2m - 1 \leqslant 0$$

Tam-thức đứng ở vế thứ nhất có hai nghiệm-số là

$$m' = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \qquad m'' = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

Ta phải chọn m sao cho

$$m' \leqq m \leqq m''$$

2. Điều-kiện ắt có và đủ để cho

$$x' < -2 < x''$$

là $af(-2) < 0$

tức là $(m+1)\,[4(m+1) + 4m + 3m - 1] < 0$

$$(m+1)(11m+3) < 0$$

Ta phải chọn m sao cho

$$-1 < m < -\frac{3}{11}$$

3. $$x'^2 + x''^2 = 2$$

$$S^2 - 2P = 2$$

Thế $S = x' + x'' = \dfrac{2m}{m+1}$

$$P = x' \cdot x'' = \frac{3m-1}{m+1}$$

ta được $\left(\dfrac{2m}{m+1}\right)^2 - \dfrac{2(3m-1)}{m+1} = 2$

$$4m^2 - 2(3m-1)(m+1) = 2(m+1)^2$$

$$4m^2 - 2(3m^2 + 2m - 1) = 2(m^2 + 2m + 1)$$

$$4m^2 + 8m = 0$$

$$4m(m+2) = 0 \quad \begin{cases} m' = 0 \\ m'' = -2 \end{cases}$$

Dựa vào kết-quả của câu 1, ta chỉ chọn được $m = 0$ mà thôi.

4. $$S = \frac{2m}{m+1} = \frac{(2m+2)-2}{m+1} = 2 - \frac{2}{m+1}$$

$$P = \frac{3m-1}{m+1} = \frac{(3m+3)-4}{m+1} = 3 - \frac{4}{m+1}$$

$$+\begin{cases} -2S = -4 + \dfrac{4}{m+1} \\ P = 3 - \dfrac{4}{m+1} \end{cases}$$

$$P - 2S = -1$$

$$\mathbf{x'x'' - 2\,(x' + x'') + 1 = 0}$$

5. Đặt $S' = y' + y''$ và $P' = y' \,.\, y''$, phương-trình phải tìm sẽ là

$$y^2 - S'y + P' = 0$$

$$\begin{aligned} S' &= (2x' - 1) + (2x'' - 1) \\ &= 2\,(x' + x'') - 2 = 2S - 2 \\ &= \frac{4m}{m+1} - 2 = \frac{4m - 2m - 2}{m+1} = \frac{2m-2}{m+1} \\ P' &= (2x' - 1)\,(2x'' - 1) \\ &= 4\,x'x'' - 2\,(x' + x'') + 1 \\ &= 4P - 2S + 1 = \frac{12m - 4}{m - 1} - \frac{4m}{m+1} + 1 \\ &= \frac{9m - 3}{m + 1} \end{aligned}$$

Vậy phương-trình phải tìm là

$$y^2 - \frac{2\,(m-1)}{m+1}\,y + \frac{3\,(3m-1)}{m+1} = 0$$

hay $\mathbf{(m + 1)\,y^2 - 2\,(m - 1)\,y + 3\,(3m - 1) = 0}$

3. Cho phương-trình :

$$\mathbf{(m^2 - m - 2)\,x^2 + (2m^2 - 2m + 5)\,x + m^2 - m - 2 = 0}$$

x là ẩn-số, m là thông-số.

1. Định m để phương-trình ở bậc nhất. Giải phương trình đó.

2. Định m để phương-trình có một nghiệm-số kép. Tính trị-số của nghiệm-số kép đó.

3. Chứng tỏ rằng – ngoại trừ những trị-số của m đã tìm thấy ở hai câu đầu – phương-trình luôn-luôn có hai nghiệm-số phân-biệt.

4. Có thể nào định m để cho phương-trình có hai nghiệm-số dương cả không ? Trong trường-hợp 2 nghiệm-số cùng dương, định m để tổng của hai nghiệm-số được cực-tiểu. Các nghiệm-số lúc đó bằng bao nhiêu ?

BÀI GIẢI

1. $a = m^2 - m - 2$

$b = 2m^2 - 2m + 5$

$c = m^2 - m - 2$ $\qquad$ $\mathbf{a = c}$

Để cho phương-trình xuống bậc nhất ta lấy :

$a = 0$ tức là $m^2 - m - 2 = 0.$

Suy ra

$\mathbf{m = -1 \, , m = 2}$

Phương-trình

$(m^2 - m - 2)\, x^2 + (2m^2 - 2m + 5)\, x + m^2 - m - 2 = 0$ (1)

trở thành :

- $9x = 0 \Rightarrow x = 0$ (với $m = -1$)
- $9x = 0 \Rightarrow x = 0$ (với $m = 2$)

2. Giả-sử $a \neq 0$. Biệt-số của phương-trình (1) là :

$\Delta = b^2 - 4ac.$

$$\begin{aligned}\Delta &= (2m^2 - 2m + 5)^2 - 4\,(m^2 - m - 2)^2 \\ &= (2m^2 - 2m + 5)^2 - (2m^2 - 2m - 4)^2 \\ &= (2m^2 - 2m + 5 + 2m^2 - 2m - 4) \\ &\qquad (2m^2 - 2m + 5 - 2m^2 + 2m + 4)\end{aligned}$$

$$= (4m^2 - 4m + 1) \cdot (9)$$

$$= 9\,(2m - 1)^2 = [3\,(2m - 1)]^2$$

Để cho (1) nhận nghiệm-số kép, ta phải có và chỉ cần có $\Delta = 0$, tức là $9\,(2m - 1)^2 = 0$. Do đó $\mathbf{m = \frac{1}{2}}$.

Trị-số của nghiệm-số kép là.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2m^2 - 2m + 5}{2\,(m^2 - m - 2)}$$

Thế $m = \frac{1}{2}$ ta được $\mathbf{x = 1}$

3. Ta không xét đến các trị-số $m = -1$, $m = 2$, $m = \frac{1}{2}$ đã tìm thấy ở hai câu đầu. Ta biết

$$\Delta = [3\,(2m - 1)]^2$$

Nhờ biểu-thức này ta biết $\Delta > 0$ bất-chấp m là bao nhiêu, vậy phương-trình (1) luôn luôn có hai nghiệm-số x', x'' phân-biệt.

4. Ta đã biết $\Delta > 0$ và ta nhận-xét thêm rằng $P = \frac{c}{a} = 1 > 0$, cho nên điều-kiện ắt có và đủ để cho x', x'' cùng dương cả là $S > 0$ tức $-\frac{b}{a} > 0$

$$-\frac{2m^2 - 2m + 5}{m^2 - m - 2} > 0 \qquad (m \neq -1,\ m \neq 2)$$

$2m^2 - 2m + 5$ là một tam-thức vô-nghiệm nên luôn luôn *dương*. Còn lại

$$-(m^2 - m - 2) > 0$$

$$m^2 - m - 2 < 0$$

$$\mathbf{-1 < m < 2}$$

Ta đang ở trong trường-hợp x', x'' là những số *dương*. Thế mà

$$\begin{cases} x' \cdot x'' = P = 1 \ (= \text{hằng-số}) \\ x' + x'' = S = -\dfrac{2m^2 - 2m + 5}{m^2 - m - 2} \end{cases}$$

Vậy *S cực-tiểu khi* $x' = x''$ nghĩa là khi phương-trình (1) có nghiệm số kép. Trong câu 2 ta đã thấy rằng: để có $x' = x''$, ta phải lấy $m = \frac{1}{2}$.

Trị-số này thích-hợp với $-1 < m < 2$ nên ta dùng được. Lúc $m = \frac{1}{2}$ thì $x' = x'' = 1$.

4. *1.* **Tìm phương-trình của parabol (P_1) có đỉnh là S (2 ; 6) và đi qua điểm M (5; − 3). Vẽ (P_1) trong một hệ trục trực-chuẩn.**

2. **Cho điều-kiện $-1 \leq x \leq 3$. Dùng đồ-thị để biện-luận sự khả-hữu và số nghiệm-số của phương-trình sau đây theo m :**

$$x^2 - 4x + m - 2 = 0$$

3. **Chung một đồ-thị với (P_1) vẽ parabol (P_2) mà phương-trình là**

$$y = x^2 - 6x + 10.$$

Tính tọa-độ giao-điểm của (P_1), (P_2).

Suy ra những trị-số của x để cho

$$-x^2 + 4x + 2 > x^2 - 6x + 10$$

4. **Đường thẳng (D) có phương-trình là $y = 2x + h$ (h là một thông-số). Định h để cho (D) và (P_2) có điểm chung. Khi chúng có hai điểm chung M′, M″ hãy tìm quỹ-tích trung-điểm I của đoạn M′, M″.**

BÀI GIẢI

1. Phương-trình của parabol (P_1) có dạng

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

(P_1) đi qua S và M nên tọa-độ của hai điểm đó nghiệm đúng hệ-thức (1) :

$$6 = 4a + 2b + c \qquad (2)$$

$$-3 = 25a + 5b + c \qquad (3)$$

Tại đỉnh S ($x = 2$) thì đạo-hàm triệt-tiêu $y' = 2ax + b = 0$, do đó

$$0 = 4a + b \qquad (4)$$

Hệ-thống tạo bởi (2) (3) (4) cho phép ta tính a, b, c.

Lấy (2) trừ (3) vế với vế ta được

$$9 = -21a - 3b \quad (5)$$

hay $\quad 3 = -7a - b$

Lấy (5) và (4) cộng vế với vế thì có

$$3 = -3a$$

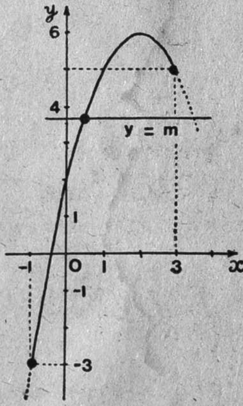
Suy ra $\quad \mathbf{a = -1}$

(4) cho $\quad \mathbf{b = 4}$

(2) cho $\quad \mathbf{c = 2}$

Vậy phương-trình của (P_1) là

$$\mathbf{y = -x^2 + 4x + 2}$$



Hình 50

2. $x^2 - 4x + m - 2 = 0$ viết được thành

$$m = -x^2 + 4x + 2$$

Ta coi hệ-thống :

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x + 2 \\ y = m \\ -1 \leqq x \leqq 3 \end{cases}$$

$y = -x^2 + 4x + 2$ được biểu-diễn bằng (P_1) nhưng ta chỉ chọn *cung* ứng với $-1 \leqq x \leqq 3$. $y = m$ được biểu-diễn bằng một đường thẳng song-song với trục x.

Hoành-độ giao-điểm — nếu có — của cung parabol với đường thẳng là trị-số của x mà ta muốn có. Trên đồ-thị ta biết :

m	KẾT-QUẢ
$+\infty$	
	vô-nghiệm
6	$x' = x'' = 2$
	hai nghiệm-số
5	$x' = 1 , x'' = 3$
	một nghiệm-số
-3	$x = -1$
	vô-nghiệm
$-\infty$	

3. Tọa-độ giao-điểm — nếu có — của (P_1) (P_2) là nghiệm-số của hệ-thống

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 10 & (P_2) \\ y = -x^2 + 4x + 2 & (P_1) \end{cases}$$

Khi y giữa hai phương-trình đó ta được phương-trình hoành-độ các giao-điểm :

$$x^2 - 6x + 10 = -x^2 + 4x + 2$$

$$2x^2 - 10x + 8 = 0$$

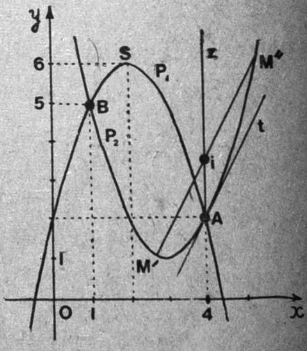
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x_1 = 1 \; ; \; x_2 = 4$$

Suy ra $y_1 = 5 \; ; \; y_2 = 2$

(P_1) (P_2) có hai giao-điểm là

B (1 ; 5) , A (4 ; 2)



Hình 51

Để cho $-x^2 + 4x + 2 > x^2 + 6x + 10$ ta chọn x sao cho (P_1) ở phía trên (P_2).

Nhờ đồ-thị ta có : $\mathbf{1 < x < 4}$

4. $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 10 & (P_2) \\ y = 2x + h & (P_1) \end{cases}$

Khử y giữa hai phương-trình đó ta được phương-trình để tính hoành-độ các giao-điềm — nếu có — của (P_2) và (D) :

$$x^2 - 6x + 10 = 2x + h$$

$$x^2 - 8x + 10 - h = 0 \qquad (6)$$

Để cho phương-trình hữu-nghiệm, ta phải có và chỉ cần có $\Delta' \geqslant 0$ tức là:

$$16 - (10 - h) \geqslant 0$$

$$6 + h \geqslant 0$$

$$\mathbf{h \geqslant -6}$$

Khi $h = 6$ thì $x' = x'' = 4$. (P_2) và (D) tiếp-xúc nhau tại điềm mà hoành-độ là $x = 4$. Tung-độ tương-ứng là $y = 2$. Đó chính là điềm A đã tìm thấy trong câu 3.

Khi $h > 6$ thì (P_2) và (D) có hai điềm chung M′, M″ mà hoành-độ là nghiệm-số của phương-trình (6).

Gọi I là trung-điềm đoạn M′ M″, tọa-độ của I là :

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + x''}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ y = 2x + h \quad = 8 + h \end{cases}$$

Vì $x = 4$ nên ta biết rằng I nằm trên đường thẳng mà phương-trình là $x = 4$.

Ta có $h = y - 8$

Theo phần trên thì $h \geqslant -6$

Vậy $y - 8 \geqslant -6 \Rightarrow y \geqslant 2$

Quỹ-tích của I là một nửa đường thẳng ($x = 4$, $y \geqslant 2$). Đó là nửa đường thẳng Az trong hình vẽ.

5. *1.* **Tìm phương-trình của parabol (P) có đỉnh là S (1 ; — 1) và qua điểm R (— 3 ; 3). Vẽ (P) trong một mục-tiêu trực-chuẩn.**

2. **Một đường thẳng (D) đi qua điểm I (2 ; — 3) và có độ dốc bằng m. Định m để cho (D) tiếp-xúc với (P). Định rõ các tiếp-điểm M, N.**

3. **Chứng tỏ rằng MIN là một tam-giác cân. Tính diện-tích của tam-giác đó.**

BÀI GIẢI

1. Phương-trình của parabol (P) có dạng

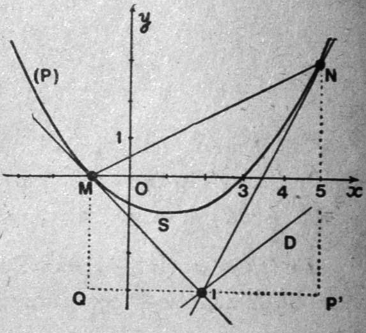
$$y = ax^2 + bx + c$$

Tọa-độ của đỉnh S là

$$\begin{cases} x = -\dfrac{b}{2a} = 1 & (1) \\ y = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = -1 & (2) \end{cases}$$

(P) đi qua điểm R nên tọa-độ của R nghiệm đúng hệ-thức

$y = ax^2 + bx + c$:



Hình 52

$$3 = 9a - 3b + c \qquad (3)$$

Để tính a, b, c ta có hệ-thống :

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1 & (1) \\ \dfrac{4ac - b^2}{4a} = -1 & (2) \\ 3 = 9a - 3b + c & (3) \end{cases}$$

(1) cho $b = -2a$, do đó (2) thành $\dfrac{4ac - 4a^2}{4a} = -1$

Chắc-chắn là $a \neq 0$ nên sau khi đơn-giản cho $4a$ ta có

$$c - a = -1 \Rightarrow c = a - 1$$

Biết b và c theo a, ta dùng (3) :

$$3 = 9a - 3(-2a) + a - 1$$

$$16a = 4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \frac{1}{4}$$

$$b = -2a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b} = -\frac{1}{2}$$

$$c = a - 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = -\frac{3}{4}$$

Vậy phương-trình của (P) là

$$\mathbf{y} = \frac{1}{4}\mathbf{x}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{x} - \frac{3}{4}$$

2. Phương-trình của (D) là :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 3 = m(x - 2)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{mx} - (\mathbf{2m} + 3)$$

Tọa-độ các điểm chung của (D) và (P) là nghiệm-số — nếu có — của hệ-thống

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \\ y = mx - (2m + 3) \end{cases}$$

Khử y giữa hai phương-trình này ta có :

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = mx - (2m + 3)$$

$$x^2 - 2x - 3 = 4mx - 8m - 12$$

$$x^2 - 2x - 4mx + 8m + 9 = 0$$

$$x^2 - 2(2m + 1)x + (8m + 9) = 0 \qquad (4)$$

Để cho (D) và (P) tiếp-xúc nhau ta phải có và chỉ cần có $\Delta' = 0$, tức

$$(2m+1)^2-(8m+9)=0$$

$$4m^2-4m-8=0$$

$$m^2-m-2=0 \qquad \begin{cases} m'=-1 \\ m''=2 \end{cases}$$

Vậy có hai đường thẳng [thuộc họ (D)] tiếp-xúc với (P)

$$y=mx-(2m+3)$$

Với $m=-1$ thì $\mathbf{y=-x-1}$

Với $m=2$ thì $\mathbf{y=2x-7}$

Tiếp-điểm có hoành-độ là *nghiệm-số kép* của phương-trình (4) :

$$x=2m+1$$

Với $m=-1$ thì $x=-1$, suy ra $y=0$.

Với $m=2$ thì $x=5$, suy ra $y=3$.

Vậy các tiếp-điểm mà ta muốn tìm là

$$\mathbf{M\,(-1\,;0)\,,\ N\,(5\,;3)}$$

3. $\mathrm{MN}^2=(x_M-x_N)^2+(y_M-y_N)^2$

$$=(-1-5)^2+(0-3)^2$$

$$=36+9=45$$

$$\mathrm{NI}^2=(x_N-x_I)^2+(y_N-y_I)^2$$

$$=(5-2)^2+(3+3)^2$$

$$=9+36=45$$

Suy ra $\mathrm{MN}=\mathrm{NI}$

Vậy MIN là một tam-giác cân, đỉnh là N.

Diện-tích tam-giác MIN bằng diện-tích hình thang vuông góc MNP'Q bớt đi diện-tích hai tam-giác vuông góc MIQ , INP'.

$$dt\ \mathrm{MIN}=\frac{1}{2}\times 6\times(3+6)-\frac{1}{2}\times 3\times 3-\frac{1}{2}\times 3\times 6$$

$$= 27 - \frac{9}{2} - 9 = \frac{27}{2}$$

Diện-tích tam-giác MIN bằng $\frac{27}{2}$ đơn-vị diện-tích.

6. 1. Tìm phương-trình của hyperbol vuông góc (H) có tâm đối-xứng là I (3 ; 1) và đi qua điểm N (4 ; — 1). Vẽ hyperbol (H) đó (hệ trục trực-chuẩn).

2. Tìm những điểm ở trên (H) tại đó tiếp-tuyến có độ dốc bằng $\frac{1}{2}$.

3. Định m để cho đường thẳng (D) — mà phương-trình là $y = \frac{1}{2}x + m$ — và hyperbol (H) có điểm chung.

4. Khi (D) và (H) có hai điểm chung M′M″, tìm quỹ-tích trung-điểm J của M′M″.

BÀI GIẢI

1. Hyperbol (H) có phương-trình là

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{x + \delta} \qquad (1)$$

Phương-trình của hai đường tiệm-cận là $x = -\delta$ và $y = \alpha$, x và y đó cũng là tọa-độ của tâm đối-xứng I.

Theo giả-thiết, ta được

$$-\delta = 3 \Rightarrow \delta = -3$$

$$\alpha = 1$$

Vậy $$y = \frac{x + \beta}{x - 3} \qquad (2)$$

(H) đi qua điểm N (4 ; — 1) nên tọa-độ của N nghiệm đúng hệ-thức (2) :

$$-1 = \frac{4 + \beta}{4 - 3}$$

Suy ra $$\beta = -5$$

Vậy phương-trình của (H) là

$$y = \frac{x-5}{x-3}$$

2. $y = \dfrac{x-5}{x-3}$ $\qquad y' = \dfrac{2}{(x-3)^2} \quad (x \neq 3)$

Ta muốn cho độ dốc của tiếp-tuyến bằng $\frac{1}{2}$, tức là $y' = \frac{1}{2}$,

vậy

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{(x-3)^2}$$

$$(x-3)^2 = 4 \; (= 2^2)$$

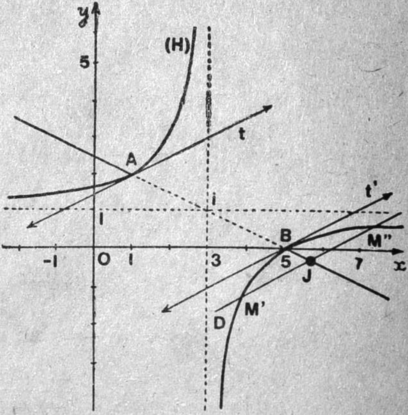
$$(x-3)^2 - 2^2 = 0$$

$$(x-3+2)\,(x-3-2) = 0$$

$$(x-1)\,(x-5) = 0$$

Suy ra $x_1 = 1$, $x_2 = 5$

Trị-số tương-ứng của y tính bằng hệ-thức $y = \dfrac{x-5}{x-3}$



Hình 53

$$y_1 = 2 \;, \quad y_2 = 0$$

Vậy, tại những điểm sau đây của (H), tiếp-tuyến có độ dốc bằng $\frac{1}{2}$:

A (1 ; 2) **B (5 ; 0)**

3. (D) : $y = \dfrac{1}{2}x + m$

(H) : $y = \dfrac{x-5}{x-3}$

Tọa-độ giao-điểm — nếu có — là nghiệm-số của hệ-thống hợp bởi hai phương-trình trên đây. Khử y giữa hai phương-trình đó, ta có :

$$\frac{1}{2}x + m = \frac{x-5}{x-3}$$

$$\frac{1}{2}x^2 + mx - \frac{3}{2}x - 3m = x - 5$$

$$\frac{1}{2}x^2 + \left(m - \frac{5}{2}\right)x - 3m + 5 = 0$$

$$\mathbf{x^2 + (2m - 5)x - 2(3m - 5) = 0} \qquad (3)$$

Để cho (D) và (H) có điểm chung, ta phải có và chỉ cần (3) có nghiệm-số, nghĩa là $\Delta \geqslant 0$

$$(2m - 5)^2 + 8(3m - 5) \geqslant 0$$

$$4m^2 - 20m + 25 + 24m - 40 \geqslant 0$$

$$4m^2 + 4m - 15 \geqslant 0 \qquad (4)$$

Tam-thức ở vế đầu có 2 nghiệm-số là :

$$m' = -\frac{5}{2}, \quad m'' = \frac{3}{2}$$

Để cho bất-phương-trình (4) được thỏa ta phải chọn *m* như sau :

hoặc $\mathbf{m < -\frac{5}{2}}$ hoặc $\mathbf{m > \frac{3}{2}}$

- Nếu lấy $m = -\frac{5}{2}$ thì $\Delta = 0$, (3) có nghiệm-số kép $x' = x'' = 5$. Vậy (D) và (H) tiếp-xúc nhau tại điểm mà hoành-độ là 5 ; tung-độ tương-ứng là 0. Tiếp-điểm chính là A.

- Nếu lấy $m = \frac{3}{2}$ thì sẽ biết rằng (D) và (H) tiếp-xúc nhau tại điểm A.

[Nếu lấy $-\frac{5}{2} < m < \frac{3}{2}$ thì (D) và (H) không có điểm nào chung].

4. Khi (D) và (H) có hai điểm chung M', M'' thì hoành-độ của chúng là nghiệm-số x', x'' của phương-trình (3). Ta có

$$x' + x'' = S = 5 - 2m$$

Gọi J là trung-điểm của M' M'', tọa-độ của J là :

$$J \begin{cases} x = \dfrac{x' + x''}{2} = \dfrac{5 - 2m}{2} = \dfrac{5}{2} - m \\ y = \dfrac{1}{2} x + m \quad \text{(vì J ở trên D)} \end{cases}$$

Cộng vế với vế ta được

$$x + y = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} x$$

Suy ra $$y = -\frac{1}{2} x + \frac{5}{2}$$

Điều này chứng tỏ rằng J nằm trên đường thẳng (*d*) mà phương-trình là $$y = -\frac{1}{2} x + \frac{5}{2}.$$

Giới-hạn. Vì hoành-độ của J là $x = \frac{5}{2} - m$ nên ta có :

$$m = \frac{5}{2} - x$$

* $m \leq -\frac{5}{2}$	* $m \geqslant \frac{3}{2}$
$\frac{5}{2} - x \leq -\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2} - x \geqslant \frac{3}{2}$
$x \geqslant 5$	$x \leq 1$

Vậy quỹ-tích của J là những phần của đường thẳng (*d*) ứng với $x \leq 1$ và ứng với $x \geqslant 5$.

Nói khác đi đó là đường thẳng (*d*) *bớt đi* đoạn ứng với $1 < x < 5$. Đó là đoạn AB.

Trên quỹ-tích, ta *có* kể hai điểm A và B.

7. *1.* **Tìm phương-trình của parabol (P) đi qua gốc tọa-độ O và có đỉnh S $(-1; -1)$.**

2. **Tìm phương-trình của hyperbol (H) đi qua ba điểm M $(-2; 4)$ N $(1; 1)$ và L $\left(-5; \frac{5}{2}\right)$.**

3. **Vẽ (P) và (H) chung một đồ-thị. Tính tọa-độ của các điểm chung.**

4. **Tìm phương-trình của tiếp-tuyến của (H) và của (P) tại O.**

Kết-luận điều gì ?

BÀI GIẢI

1. Phương-trình của parabol (P) có dạng

$$y = ax^2 + bx + c$$

Vì (P) đi qua gốc O ($x = 0$, $y = 0$) nên ta có $c = 0$ và

$$y = ax^2 + bx$$

$$y' = 2ax + b$$

Tại đỉnh S thì $x = -1$, $y = -1$, $y' = 0$. Vì thế ta có

$$\begin{cases} -1 = a - b \\ 0 = -2a + b \end{cases}$$

Cộng vế với vế thì được

$$-1 = -a \qquad \mathbf{a = 1}$$

Suy ra $\qquad b = a + 1 \qquad \mathbf{b = 2}$

Vậy phương-trình của (P) là

$$\mathbf{y = x^2 + 2x}$$

$$y' = 2(x + 1)$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Phương-trình của hyperbol (H) có dạng $y = \dfrac{\alpha x + \beta}{x + \delta}$

hay $$xy + \delta y = \alpha x + \beta \qquad (1)$$

Ba điểm M, N, L ở trên (H) nên tọa-độ của chúng làm thỏa hệ-thức (1) :

$$\begin{cases} -8 + 4\delta = -2\alpha + \beta & (2) \\ 1 + \delta = \alpha + \beta & (3) \\ -\dfrac{25}{2} + \dfrac{5}{2}\delta = -5\alpha + \beta & (4) \end{cases}$$

Lấy (2) (3) trừ vế với vế, và lấy (3) (4) trừ vế với vế, ta được

$$\begin{cases} -9 + 3\delta = -3\alpha & (5) \\ \dfrac{27}{2} - \dfrac{3\delta}{2} = 6\alpha & (6) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -9 + 3\delta = -3\alpha \\ 27 - 3\delta = 12\alpha \end{cases}$$

$$18 = 9\alpha$$

$$\alpha = 2$$

Nhờ (5) ta có

$$-9 + 3\delta = -6$$

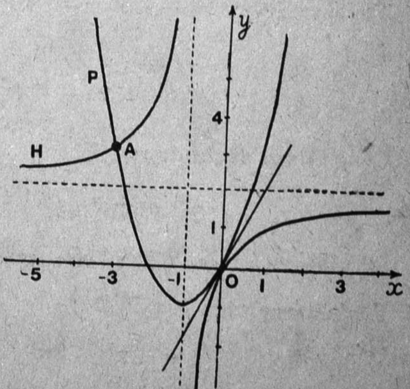
$$\delta = 1$$

Nhờ (3) ta tìm được β

$$1 + 1 = 2 + \beta \text{ , } \beta = 0$$

Vậy phương-trình của (H) là :

$$y = \frac{2x}{x + 1}$$



Hình 54

$$y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \qquad x \neq -1$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & -\infty & & -1 & & +\infty \\
\hline
y' & & + & \| & + & \\
\hline
y & & & +\infty \;\|\; & & 2 \\
 & & \nearrow & \| & \nearrow & \\
 & 2 & & \|\; -\infty & &
\end{array}$$

3. Tọa-độ các điềm chung — nếu có — của (P) và (H) là nghiệm-số của hệ-thống

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x = x(x+2) \\ y = \dfrac{2x}{x+1} \end{cases}$$

Khử *y* giữa hai phương-trình đó ta có

$$x(x+2) = \frac{2x}{x+1} \qquad (7)$$

Một nghiệm-số hiền-nhiên là $x = 0$.

Các nghiệm-số còn lại sẽ là nghiệm-số của phương-trình

$$x + 2 = \frac{2}{x+1}$$

$$(x+2)(x+1) = 2$$

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x(x+3) = 0$$

Suy ra $\qquad x = 0$ và $x = -3$

Vậy phương-trình (7) có một nghiệm-số *kép* là $x = 0$ và một nghiệm-số *đơn* là $\qquad x = -3$

Khi $\qquad x = 0 \quad$ thì $\quad y = 0$

Khi $\qquad x = -3 \quad$ thì $\quad y = 3$

(H) và (P) có một *tiếp-điểm* (gốc O) và một *giao-điểm*

$$A\,(x = -3\,,\; y = 3)\,.$$

4. ● $y = x^2 + 2x$ $\qquad y' = 2\,(x + 1)$ $\qquad y_0' = 2$

Phương-trình của tiếp-tuyến của (P) tại O là

$$y = 2x$$

● $y = \dfrac{2x}{x+1}$ $\qquad y' = \dfrac{2}{(x+1)^2}$ $\qquad y'_0 = 2$

Phương-trình của tiếp-tuyến của (H) tại O là $y = 2x$

Tại O, (H) và (P) có tiếp-tuyến chung. Vậy (H) và (P) tiếp-xúc nhau tại O.

MỤC-LỤC

TRANG

Chương-trình 5

Bài 1. **Tam-thức bậc hai** 7
  1. *Định-nghĩa* 7
  2. *Phân-tích tam-thức thành thừa-số* 9
  Bài Tập 12

Bài 2. **Dấu của tam-thức bậc hai** 15
  Bài Tập 23

Bài 3. **Bất-phương-trình bậc hai** 25
  Bài Tập 31

Bài 4. **Vị-trí của một số đối với hai nghiệm-số của một tam-thức bậc hai** 34
  Bài Tập 43

Bài 5. **Tọa-độ** 45
  1. *Cách định chỗ một điểm ở trên một trục* 45
  2. *Cách định chỗ một điểm trong mặt phẳng* . . . 48
  3. *Đường thẳng* 52
  Bài Tập 54

Bài 6. **Đại-cương về hàm-số** 55
  Bài Tập 60

Bài 7. **Đạo-hàm** 61
  1. *Định-nghĩa* 61
  2. *Nghĩa hình-học của đạo-hàm* 65
  Bài Tập 69

TRANG

Bài *8.* **Phép tính đạo-hàm.** 71

Bài Tập 81

Bài *9.* **Công-dụng của đạo-hàm** 83

Bài *10.* **Hàm-số bậc hai** 89

Bài Tập 102

Bài *11.* **Hàm-số nhất-biến** 107

Bài Tập 116

Bài *12.* **Một số vấn-đề thông-dụng.** 121

Bài Tập 136

Bài Toán học ôn 139

Bài Toán học ôn có giải 144

Đại Số lớp 11 A
Giấy phép số 2056/BTT/BC3/XB
ngày 29-5-65

In tại cơ-sở ấn-loát ĐƯỜNG-SÁNG